

Warsztaty „Optyka i Informatyka Kwantowa 3”

Warszawa, 17-21 września 2012 r.

Kwalifikacja na warsztaty odbędzie się na podstawie rozwiązań poniższych zadań. Brane pod uwagę będą także zgłoszenia zawierające rozwiązania pojedynczego lub dwóch zadań.

- Termin nadsyłania zgłoszeń z rozwiązaniami zadań kwalifikacyjnych: 26 sierpnia 2012 r.
- Informacja o wynikach kwalifikacji: do 2 września 2012 r.

Szczegóły na stronie internetowej warsztatów <http://psi.fuw.edu.pl/Main/OiK3>

Zadanie 1. Zaprojektuj układ optyczny, który odwzorowuje wiązki światła biegnące wzdłuż osi z przez płaszczyznę $z = 0$ na płaszczyznę $z = L$ w następujący sposób: dowolna wiązka gaussowska o długości fali λ , płaskich frontach falowych w $z = 0$ i dowolnej średnicy w przekształcana jest na wiązkę o płaskich frontach w $z = L$ i średnicy $w' = g/w$, gdzie g jest pewną stałą.

- zaproponuj rozwiązanie z jedną cienką soczewką działające dla każdego w . W jakim zakresie można zmieniać g dla danego L ?
- zaprojektuj rozwiązanie z dwiema cienkimi soczewkami, które umożliwi dla tego samego L osiągnięcie stałej g cztery razy mniejszej niż najmniejsza możliwa w punkcie (a).
- w przybliżeniu przyosiowej optyki geometrycznej narysuj i opisz bieg promieni przez układ (a) i (b),
 - dla wiązki promieni równoległych nachylonych pod kątem α do osi z przed układem,
 - dla pęku promieni rozchodzącego się z punktu $(x, y, z) = (h, 0, 0)$.
- jaką wiązkę światła należałoby wysłać z płaszczyzny $z = 0$ alby w $z = L$ otrzymać wiązkę gaussowską o płaskich, prostopadłych do osi z frontach falowych, średnicy w' i maksimum natężenia przesuniętym do $x = h'$?

Zadanie 2. Dowolny stan czysty dwupoziomowego układu kwantowego można zapisać w postaci:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle,$$

gdzie $|0\rangle, |1\rangle$ tworzą ortonormalną bazę w dwuwymiarowej przestrzeni Hilberta, a normalizacja stanu wymaga by $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. W kwantowej teorii informacji układ taki nazywamy qubitami. Uwzględniając fakt że globalna faza nie ma znaczenia fizycznego tzn. $e^{i\xi}|\psi\rangle \equiv |\psi\rangle$, dowolny stan qubitów można zapisać w postaci:

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + \sin\frac{\theta}{2}e^{i\varphi}|1\rangle,$$

gdzie $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Można więc elegancko obrazować sobie stan czysty qubitów jako punkt na sferze o współrzędnych (θ, φ) . Taką sferę pozwalającą wizualizować sobie stan qubitów nazywamy sferą Blocha.

- Dla danego stanu $|\psi\rangle$ zapisz stan ortogonalny do niego $|\psi_{\perp}\rangle$ (czy jest jednoznaczny?) i zinterpretuj jego położenie na sferze Blocha
- W obliczeniach kwantowych pod pojęciem bramki kwantowej rozumie się operację unitarną na qubicie/qubitach. Zbadaj czy istnieje bramka kwantowa U , której można by nadać nazwę *universal NOT*, czyli taka która: $\forall_{|\psi\rangle} U|\psi\rangle = |\psi_{\perp}\rangle$.

Zadanie 3. W procesie *parametrycznego podziału częstości*, gdy ośrodek nieliniowy oświetlany jest laserową wiązką pompującą o częstości kołowej ω_p i wektorze falowym \mathbf{k}_p , pojedynczy foton z wiązki może spontanicznie rozpaść się na parę fotonów, z których jeden, zwany tradycyjnie sygnałowym (ang. *signal*) ma częstość ω_s i wektor falowy \mathbf{k}_s , zaś drugi, zwany jałowym (ang. *idler*) częstość ω_i i wektor falowy \mathbf{k}_i . Określenia „sygnałowy” i „jałowy” dla wyprodukowanych fotonów są umowne, gdyż ich role są całkowicie symetryczne. Generowane fotony spełniają warunek wynikający z zasady zachowania energii

$$\omega_s + \omega_i = \omega_p, \quad (1)$$

oraz warunek dopasowania fazowego:

$$\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i = \mathbf{k}_p. \quad (2)$$

Dzięki tym warunkom pary generowanych fotonów wykazują silne korelacje w częstościach i kierunkach propagacji. Załóżmy, że proces zachodzi w *jednoosiowym kryształ dwójłomnym*. W ośrodku takim dla danego kierunku rozchodzenia się światła występują dwa różne współczynniki załamania. Jeden ze współczynników załamania, odpowiadający *promieniowi zwyczajnemu*, jest taki sam dla dowolnego kierunku propagacji. Będziemy go oznaczać n_o^ω , gdzie jawnie zaznaczyliśmy zależność od częstości ω . Drugi współczynnik załamania, określony dla *promienia nadzwyczajnego*, zależy od kąta θ , jaki wektor falowy tworzy z pewnym szczególnym kierunkiem zwanym *osią optyczną* kryształu. Zależność ta jest dana jawnie wzorem

$$n^\omega(\theta) = \left(\frac{\cos^2 \theta}{(n_o^\omega)^2} + \frac{\sin^2 \theta}{(n_e^\omega)^2} \right)^{-1/2} \quad (3)$$

gdzie n_o^ω oraz n_e^ω są współczynnikami załamania promienia zwyczajnego i nadzwyczajnego dla $\theta = 90^\circ$.

Zajmijmy się przypadkiem, kiedy obydwa fotony są wygenerowane jako promienie zwyczajne i mają taką samą częstość $\omega_s = \omega_i = \omega$, zaś wiązka pompująca o częstości 2ω propaguje się jako promień nadzwyczajny. Wektory falowe mają zatem długość

$$|\mathbf{k}_s| = |\mathbf{k}_i| = \frac{n_o^\omega \omega}{c}, \quad |\mathbf{k}_p| = \frac{n_e^{2\omega}(\theta) 2\omega}{c}. \quad (4)$$

Widać stąd, że gdy $n_o^\omega > n_e^{2\omega}$, wektory falowe fotonów sygnałowego i jałowego tworzą stożek, którego osią symetrii jest wektor falowy wiązki pompującej.

- Dla kryształu beta-boranu baru (ang. *beta-barium borate*, BBO) narysować w funkcji długości fali wiązki pompującej z przedziału pomiędzy 300 nm oraz 600 nm kąt θ , dla którego warunek dopasowania fazowego zachodzi dla współliniowych wektorów falowych \mathbf{k}_s , \mathbf{k}_i oraz \mathbf{k}_p przy założeniu, że fotony sygnałowy i jałowy mają taką samą częstość. Zależność współczynników załamania od długości fali jest określona *wzorami Sellmeiera*, które można znaleźć np. na stronach producentów BBO.
- Obliczyć kąt α półotwarcia stożka dla fotonów wychodzących z kryształu w funkcji kąta θ , gdy ośrodkiem nieliniowym jest kryształ BBO pompowany światłem o długości fali $\lambda_p = 405$ nm. Zakładamy, że dla każdego kąta θ kryształ jest wycięty tak, że wiązka pompująca pada prostopadle do jego powierzchni.
- Na kryształ BBO pada wiązka pompująca o długości fali $\lambda_p = 405$ nm prostopadle do powierzchni. Kąt wycięcia kryształu θ jest tak dobrany, aby pary fotonów o zdegenerowanej długości fali (tzn. $\lambda_s = \lambda_i = 810$ nm) wychodziły pod kątem $\alpha = 3^\circ$ do wiązki pompującej. W jakich kierunkach będą emitowane fotony o innych częstościach pochodzące z par dla których $\lambda_s \neq \lambda_i$? Przedstawij na wykresie, jak długość fali emitowanych fotonów λ zależy od kąta emisji α względem wiązki pompującej.