Zadania

Podstawy fizyki IV - ćwiczenia 4
Radek Chrapkiewicz

28.02.2013

Ośrodek dyspersyjny

1. Znajdź zespolony współczynnik podatności elektrycznej $\chi(\omega)$ w gazie w modelu Lorentza. Załóż, że atomy to oscylatory harmoniczne - elektron + jon dodatni, o częstości własnej ω_0, stałej tłumienia γ. Koncentracja atomów (liczba na jednostkę objętości) wynosi N. Rozwiąż równanie różniczkowe za pomocą transformaty Fouriera.

2. Pokaż, że urojona część współczynnika załamania jest proporcjonalna do stałej tłumienia eksponencjalnego w ośrodku. Jaka jest dokładnie ta stała tłumienia w ośrodku o podatności elektrycznej $\chi(\omega)$ dla częstotliwości ω_0.

3. Znajdź relację pomiędzy polem elektrycznym a polaryzacją elektryczną w dziedzinie czasu.

4. Wyprowadź równanie propagacji dla wolno zmiennej obwiedni $A(z,t)$ w ośrodku dyspersyjnym o podatności liniowej $\chi(\omega)$. Załóż, że pakiet falowy, który propagujesz nie ma zbyt szerokiego widma to znaczy $k(\omega) \simeq k(\omega_0)$. *Odpowiedź:*

$$\frac{\partial \tilde{A}(\omega,z)}{\partial z} = i(k(\omega) - k_0)\tilde{A}(\omega,z)$$

5. Rozwiązując równanie z zadania 4. pokaż, że prędkość propagacji obwiedni czyli prędkość grupowa wynosi $v_g = \partial\omega/\partial k$.

Zadania domowe

Zadania bez gwiazdki powinniście być w stanie bezproblemowo rozwiązywać na kolokwium. Zadania z gwiazdką są dla ciekawskich, którzy chcą się sami czegoś nauczyć ponad program wykładu, co przyda się później i na studiach czy w pracy naukowej. Potencjalnie będziecie mogli po zakończeniu tego kursu samodzielnie robić symulację rzeczywistych układów fizycznych (np. nieliniowe efekty, supercontinuum, solitony).

W przypadku zadań z ćwiczeń, zadań domowych z gwiazdką i bez, samodzielne i regularne rozwiązywanie ich ma Wam dać w ręku zrozumienie kawałka fajnej fizyki.

1. Wyprowadź jeszcze raz samodzielnie równanie na wolno zmienną obwiednię w ośrodku w którym $P(\omega) = \varepsilon_0\chi(\omega)E(\omega)$. Rozwiń $k(\omega)$ w szereg Taylora. Dla jakich parametrów $\beta_n = d^n k/d\omega^n$ równanie jest tożsame równaniu Shroedingera dla fal materii? Równanie Schroedingera:
$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\psi$$
Wskazówka: zamień t na z.

2. Policzyć odwrotną transformatę Fouriera $\chi(t) = \mathcal{F}^{-1}(\chi(\omega))$ z modelu Lorentza.

3. * (Dla tych co chcą zrozumieć przyczynowość w elektrodynamice i dla tych co lubią funkcje analityczne) Wyprowadź relacje Kramersa-Kroniga:
`http://en.wikipedia.org/wiki/Kramers%E2%80%93Kronig_relations`

4. Przeprowadź jeszcze raz samodzielnie rachunek - rozwiązanie równania wolno zmiennej obwiedni, która jest uniwersalnym przepisem na znajdowanie propagacji pakietów falowych w wielu dziedzinach fizyki. Zgodnie z równaniem na wolno zmienną obwiednię propagacja impulsów światła czyli inaczej pakietów falowych sprowadza się do prostych operacji na amplitudzie spektralnej impulsu. Przykładowo, jeżeli startujemy z impulsu $A(t, z = 0)$, to żeby znaleźć kształt obwiedni w punkcie z: $A(t,z)$ stosujemy następujące kroki: a) Robimy transformatę odwrotną $A(\omega) = \mathcal{F}(A(t))$ b) Mnożymy amplitudę spektralną przez czynnik fazowy zależny od częstotliwości: $A(\omega,z) = e^{i(k_0-k(\omega))z}A(\omega,0)$ c) Robimy transformatę odwrotną: $A(t,z) = \mathcal{F}^{-1}(e^{i(k_0-k(\omega))z}A(\omega,0))$.

5. *Zaimplementuj numerycznie w Mathematicę propagację impulsu o dowolnym kształcie (może być gaussowski) przy uwzględnieniu wyższych członów dyspersyjnych $\beta_n = d^n k/d\omega^n$. $n = 0$ odpowiada stałemu czynnikowi fazowemu. $n = 1$ jest odpowiedzialne z prędkość grupową. Co będzie gdy $\beta_n \neq 0$ tylko gdy $n = 2$ (ten człon odpowiedzialny jest za dyspersję prędkości grupowej). Spróbuj propagację gdy $\beta_n \neq 0$ tylko gdy $n = 3$ i wyższych członów. W praktyce obserwuje się zazwyczaj efekty tylko dla $n \leq 3$.

6. Spróbuj zrobić następującą symulację (bez problemu powinieneś policzyć to też na papierze): mamy dwa impulsy laserowe o tej samej obwiedni $A(t) = A_0 e^{-t^2/2\tau^2}$ ale o innych częstotliwościach nośnych: ω_1 i ω_2 odpowiednio. Ponieważ częstotliwości nośne są inne, impulsy będą miały inne prędkości grupowe $v_g = \beta_1^{-1}$. Zasymuluj „wyprzedzanie" dwóch impulsów. Narysuj moduł kwadrat amplitudy w funkcji czasu dla różnych odległości propagacji (użyj funkcji Manipulate, lub zrób animację). Wskazówka: Najprościej zrobić symulację czy obliczenia w układzie w którym jeden impuls spoczywa. Jak zinterpretujesz wynik?

7. Jaki będzie czas trwania gaussowskiego impulsu laserowego po przejściu przez szybę szklaną o grubości $d = 5$ mm. Długosc fali $\lambda = 800$ nm, początkowy czas trwania impulsu wynosi 30 fs. Współczynnik $\beta_2 = 30$ fs^2/mm dla szkła.