Zadania

Podstawy fizyki IV - ćwiczenia 27
Radek Chrapkiewicz

29.05.2013

1. Wyprowadź równanie propagacji w zjawisku generacji II harmonicznej. Zastosuj przybliżenie wolno zmiennej obwiedni. Napisz równanie na propagację obwiedni pompy oraz obwiedni generowanej II harmonicznej.
2. Rozwiąż równanie propagacji przy założeniu, że pompa jest nie osłabiana i że spełniony jest warunek dopasowania fazowego.
3. Rozwiąż równanie propagacji przy niedopasowaniu fazowym.
4. Zaproponuj konfigurację eksperymentu w którym dopasowanie fazowe jest spełnione.
5. Podaj szkic rozwiązania sprzężonej pary równań propagacji na obwiednie pompy i generowanego światła II harmonicznej bez dodatkowych założeń o tym, że moc pompy się nie zmienia. Teraz mamy do czynienia z nieliniowym układem równań różniczkowych, który można rozwiązać tylko numerycznie.
6. Pokaż, że dla małej odległości propagacji gdzie można napisać przybliżone rozwiązanie analityczne układu równań z zadania 6 energia jest zachowana.
7. Podaj jakie inne procesy mieszania częstości są możliwe przy nieliniowości II rzędu.
8. Podaj równanie na propagację pola z uwzględnieniem nieliniowości III rzędu gdzie nowo powstała fala ma tą samą częstość nośną co fala wejściowa (nielinowość Kerra).

Zadania domowe

1. Żeby lepiej zrozumieć ideę dopasowania fazowego, rozważcie następujący problem. Przez ośrodek – kryształ rozciągający się od $z = 0$ do $z = L$ propaguje się fala pompująca $A(z,t) = A_0 \exp(i\omega t - ik(\omega)z)$. Każdy punkt kryształu stanowi nowe źródło fali II harmonicznej o pewnej amplitudzie. Na przykład w chwili czasu t' i punkcie z' powstanie fala o amplitudzie i fazie $dB_0 \exp(i\varphi(t', z'))$, gdzie faza powstałej fali będzie zgodna z fazą fali pompującej: $\varphi(z', t') = i\omega t' - ik(\omega)z'$. Z drugiej strony fala II harmonicznej propaguje się w trochę inny sposób - ma inny wektor falowy i inną częstotliwość. W związku z tym amplituda fali będzie ewoluowała w następujący sposób: $dB(z,t) = dB_0 \exp(i2\omega t - ik(2\omega)z + i\varphi(z', t'))$. Zobacz teraz jaka będzie amplituda fali na wyjściu z kryształu tzn. $B(L) = \int_0^L dB$. Zobacz, że tylko gdy współczynniki załamania dla częstotliwości A i B są równe, to tylko wtedy przyczynki do amplitudy dB zsumują się do czegoś dużego, w innych przypadkach zajdzie interferencja destruktywna - to jest właśnie dopasowanie fazowe.
2. Równanie na propagację pompy o obwiedni A i światła II harmonicznej o obwiedni B można zapisać w następującej formie:
$$\frac{\partial A}{\partial z} = i\zeta B A^*$$
$$\frac{\partial B}{\partial z} = i\zeta A^2$$
Ten układ można przedstawić w formie wektorowej:
$$\frac{\partial}{\partial z}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = i\zeta \begin{pmatrix} 0 & A^*(z) \\ A(z) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$
Znajdź przybliżone analityczne rozwiązanie dla małej odległości propagacji $z \to z + \Delta z$ w którym macierz można potraktować jak stałą (przybliżenie jest tym lepsze im Δz mniejsze).
3. * Powyższy układ równań opisuje w zdegenerowany proces mieszania 3 fal. W szczególności może opisać zjawisko wzmocnienia parametrycznego w którym jeżeli fala o częstotliwości dwukrotnie większej B zostanie nieliniowo zmieszana z falą A, to nastąpi wzmacnianie fali A. Pokaż, że to wzmocnienie zależy od różnicy faz pomiędzy falą A i B. Uwaga: ta właściwość z klasycznej optyki nieliniowej ma bezpośredni związek z produkcją tzw. stanów ściśniętych w optyce kwantowej, ale również za pomocą efektu wzmocnienia parametrycznego w ośrodku z nieliniowością II rzędu.

4. Równanie propagacji z nieliniowością III rzędu typu Kerra przy braku liniowych efektów dyspersyjnych ma następującą postać:

$$\frac{\partial A}{\partial z} = i\gamma|A|^2 A$$

Rozwiąż to równanie w przybliżony sposób, traktując w małym kroku propagacji $|A|^2$ jak stałą. Sprawdź jak wraz z propagacją zmienia się widmo impulsu gaussowskiego $A(z=0,t) = A_0 e^{-t^2/2\tau^2}$. Żeby uzyskać wzór analityczny przybliż funckję gaussa jej rozwinięciem Taylora do II rzędu.

5. * W analogiczny sposób jak w poprzednim zadaniu rozważ propagację w przestrzeni wiązki gaussowskiej która wchodzi do ośrodka z nieliniowością Kerra. Pokaż, że nastąpi zjawisko samoogniskowania oraz oblicz efektywną ogniskową powstałej soczewki w zależności od parametrów wiązki wchodzącej, stałej γ i długości ośrodka.