Zadania

Podstawy fizyki IV - ćwiczenia 1
Radek Chrapkiewicz

20.02.2013

Wstęp matematyczny

1. Iloczyn skalarny w unitarnej przestrzeni funkcji wynosi $\langle f|g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t)g(t)\ dt$. Pokaż, że rodzina wektorów $u_\omega(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i\omega t}$ sparametryzowana rzeczywistym parametrem ω stanowi bazę ortogonalną w tej przestrzeni.

2. Delta Diraca $\delta(x)$ zdefiniowana jest przez dwie własności:

$$1^\circ \quad \delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$$

$$2^\circ \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$$

   Udowodnij: $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$.

3. Pokaż, że baza z zadania 1. $u_\omega(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i\omega t}$ jest unormowana do delty Diraca tzn. $\langle u_\omega|u_{\omega'}\rangle = \delta(\omega - \omega')$.

4. Znajdź rozkład funkcji $f(t)$ na wektory bazowe, podaj współczynniki tego rozkładu. *Odpowiedź:*

$$\mathcal{F}^{-1}(\tilde{f}(\omega)) = f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

   to odwrotna transformata Fouriera. Współczynniki rozkładu $\tilde{f}(\omega)$ to transformata Fouriera:

$$\mathcal{F}(f(t)) = \tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

5. Znajdź rozkład na wektory bazowe funkcji $\sin\omega t$ oraz $\cos\omega t$.

6. Widmo światła o polu elektrycznym $E(t)$ zdefiniowane jest przez kwadrat modułu amplitudy spektralnej (transformaty Fouriera): $|\tilde{E}(\omega)|^2$. W przypadku idealnie monochromatycznego lasera emitującego dla którego $E(t) = E_0\cos\omega_0 t$ widmo powinno być proporcjonalne do delty Diraca $\delta(\omega-\omega_0)$, czyli mieć nieskończenie małą szerokość. Spektrometr zazwyczaj jednak mierzy widmo przez skończony czas. Znajdź widmo lasera zmierzone przez spektrometr w okienku czasowym $\tau = 10$ ms.

7. Grupa wzbudzonych atomów (np. w neonówce, w ośrodku laserowym, w parach rubidu), żyje zazwyczaj przez krótki czas τ po czym relaksuje do stanu podstawowego emitując światło o częstotliwości $\omega_0 = \Delta E/\hbar$ odpowiadającej różnicy energii pomiędzy poziomem podstawowym i wzbudzonym ΔE. Obserwowane światło ma następujący przebieg pola elektrycznego w czasie: $E(t) = E_0 e^{-i\omega_0 t}e^{-t/\tau}$. Znajdź widmo tego światła i jego szerokość połówkową. Czas życia to $\tau =$10 ns, a centralna długość fali emitowanego światła $\lambda = 800$ nm.

Zadania domowe

1. Udowodnij: $f(t) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f(t)))$.

2. Oblicz: $\mathcal{F}(f(t)e^{i\omega_0 t}) =?$

3. Oblicz: $\mathcal{F}(f(at)) =?$

4. Zainstaluj program Mathematica 9 (licencja wydziałowa dla wszystkich studentów i pracowników). Oblicz i wykreśl numeryczną transformatę Fouriera funkcji prostokątnej.