

# Dyfrakcja na siatce w 3 wymiarach

Wojciech Wasilewski

## CELEM ĆWICZENIA JEST:

1. Montaż modelu teoretycznego z dostarczonych elementów
2. Wykonanie pomiarów potwierdzających teorię

Przed ćwiczeniem wykonaj wszystkie polecenia Oblicz, Wykonaj rysunek. Polecenia z \* są trudniejsze — opcjonalne. Materiał sekcji I jest niezbędny do wykonania ćwiczenia. Kolejne sekcje są pomyślane jako dodatkowe informacje o coraz to wyższym stopniu trudności.

## I. ELEMENTY

Proponujemy montaż modelu teoretycznego z kilku prostych elementów

### A. Fala płaska

Niech fala elektromagnetyczna padająca na siatkę będzie opisana wzorem:

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \Re \vec{\epsilon} A \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t), \quad (1)$$

gdzie  $E_x$  oznacza że jedynie pole elektryczne w osi  $x$  jest niezerowe (fala spolaryzowana liniowo),  $\vec{k}$  nazywamy wektorem falowym,  $\Re$  oznacza część rzeczywistą,  $\vec{\epsilon}$  jest wersorem jednostkowym (kierunkiem drgań pola) zaś  $A$  jest amplitudą fali. Zauważ, że amplituda może być zespolona. Wówczas jej argument  $\arg A$  decyduje o fazie fali, zaś moduł  $|A|$  o maksymalnym polu elektrycznym. Fala taka biegnie w kierunku wskazywanym przez wektor falowy  $\vec{k}$ .

Z równań Maxwella wynikają ograniczenia powyższe parametry. Z równania  $\nabla \cdot \vec{E} = 0$  uzyskujemy warunek poprzeczności fali:  $\vec{\epsilon} \perp \vec{k}$  zaś z połączenia równań na rotacje warunek na długość wektora falowego:

$$\vec{k}^2 = \omega^2/c^2. \quad (2)$$

*Oblicz 1.* Jaki kąt tworzy wektor falowy  $\vec{k}$  fali płaskiej o  $\lambda = 500 \text{ nm}$  z osią  $z$  jeśli  $k_x = 2\pi \times 1000/\text{mm}$  oraz  $k_y = 0$ ? W jakim kierunku drga pole jeśli jest to kierunek prostopadły do osi  $z$ ?

*Zagadka\** Niech  $\vec{\epsilon}A = (\hat{x} + i\hat{y}) \text{ V/m}$ . Jakiemu kierunkowi pola elektrycznego (w funkcji czasu) odpowiada taka amplituda?

## B. Emisja z płaszczyzny

Rozważmy płaszczyznę  $xy$  na której gęsto rozstawiono anteny (np mikrofalowe) zasilane z generatorów. Rozważmy sytuację, kiedy częstość wszystkich generatorów była identyczna i wynosiła  $\omega$  zaś faza generatora doprowadzającego sygnał do anteny o współrzędnych  $(x, y)$  wynosiła  $\phi(x, y) = a_x x + a_y y$ . Oznaczając symbolem  $\perp$  kierunek prostopadły do  $z$  napiszemy  $\phi(\vec{r}_\perp) = \vec{a}_\perp \cdot \vec{r}_\perp$ . Generatory ustawiamy w taki sposób aby zapisana faza była fazą drgań pola elektrycznego tuż za anteną. Niech oś  $x$  będzie ustawiona wzdłuż kierunku drgań pola emitowanego przez anteny. Spodziewamy się wówczas, że pole elektryczne bezpośrednio na wyjściu z anten będzie postaci:

$$\vec{E}_o(x, y, z = 0, t) = \Re \hat{x} A_0 \exp(i\vec{a}_\perp \cdot \vec{r}_\perp - i\omega t). \quad (3)$$

*Oblicz 2.* Czy istnieje taka fala płaska, która w płaszczyźnie  $z = 0$  jest zgodna z powyższym? Jaki byłby jej wektor falowy? Czy dla dowolnego  $\vec{a}_\perp$  można uzyskać zgodność?

## C. Superpozycja fal

Równania Maxwella są liniowe. Suma rozwiązań z dowolnymi wagami też jest rozwiązaniem.

## D. Szereg Fouriera

Dowolną (fizycznie sensowną) funkcję periodyczną  $f(x + \Delta) = f(x)$  można rozwinąć w szereg Fouriera:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inKx} \quad K = 2\pi/\Delta \quad (4)$$

gdzie współczynniki rozkładu  $c_n$  są zespolone. Powyższa postać wprost pasuje do fal płaskich.

Wzór (4) można odwrócić mnożąc obie strony przez  $\exp(-imKx)$  i całkując obustronnie o jednym okresie. Otrzymamy wówczas:

$$c_m = \int_0^\Delta \frac{dx}{\Delta} f(x) e^{-imKx}. \quad (5)$$

Alternatywnie można szereg Fouriera zapisać w postaci:

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n \cos(nKx) + q_n \sin(nKx) \quad (6)$$

*Oblicz 3.* Powtórz opisany rachunek i wyprowadź wersję wzoru (5) w której całka przebiega od  $-\Delta/2$  do  $\Delta/2$ .

*Oblicz 4.* Amplitudy  $c_n$  rozkładu fali prostokątnej o wypełnieniu  $\epsilon$ ,  $f(x) = 1$  dla  $-\Delta\epsilon/2 < x < \Delta\epsilon/2$  i okresowo powtórzone z okresem  $\Delta$  oraz  $f(x) = 0$  dla pozostałych  $x$ . Zaczynij od naszkicowania wykresu funkcji.

*Oblicz 5.* Amplitudy  $p_n$  i  $q_n$  w funkcji  $c_n$ . Która postać jest wygodniejsza do rachunków a która lepiej oddaje charakter (parzystość) funkcji?

*Oblicz 6.* Jak zmieniają się amplitudy rozkładu  $c_n$  jeśli funkcja  $f(x)$  zostanie przesunięta o  $\delta$ ? Dla ustalenia notacji:  $f'(x) = f(x - \delta)$ , wyraż  $c'_m$  przez  $c_m$ .

### E. Amplitudowa siatka dyfrakcyjna

Aby przeanalizować działanie płaskiej siatki dyfrakcyjnej wygodnie podzielić przestrzeń na dwie części  $z < 0$  od strony padania fali oraz  $z > 0$ . Pole wychodzące  $E_>$  wprost za siatką można wyrazić jako iloczyn pola wchodzącego  $E_<$  i funkcji transmisji amplitudowej siatki  $\tau(x, y)$ :

$$E_>(x, y, z = 0, t) = E_<(x, y, z = 0, t)\tau(x, y). \quad (7)$$

### F. Składanie modelu

*Oblicz 7.* Wypisz wzór siatkowy wiążący kąty padania  $\alpha$  i ugięcia  $\beta$  na siatce dyfrakcyjnej dla zwykłej rozważanej w podręcznikach sytuacji padania w płaszczyźnie prostopadłej do rys. Przepisz go do postaci wiążącej odpowiednie składowe wektory falowe fali padającej i ugiętej.

*Oblicz 8.* Dla sytuacji podręcznikowej: zapisz wektor falowy fali padającej. Wybierz funkcję transmisji siatki (zachęcam do prostokątnej — szczeliny szerokości połowy okresu lub prościej — sinusoidalnej). Wykorzystaj elementy aby obliczyć pole wychodzące  $E_>$  w postaci sumy wiązek. Sprawdź zgodność ze wzorem siatkowym i uogólnij na przypadek padania w płaszczyźnie zawierającej rysy.

## II. PRZEBIEG ĆWICZENIA

1. Do dyspozycji masz:

- laser: czerwony 650nm, zielony 512nm lub niebieski 405nm
- ekran: pudło tekturowe na które możesz nakleić papier milimetrowy i ew. linijkę
- siatki dyfrakcyjne transmisyjne 500 lub 1000/mm
- uchwyty do siatki oraz lasera - możesz zmontować z dostępnych elementów wg. upodobania

(e) drugi ekran lub zamocowaną linijkę lub inny sposób pomiaru kąta padania poprzez obserwację odbicia od siatki

2. Przedstaw asystentowi w jaki sposób zamierzasz spełnić cel ćwiczenia, skonsultuj kwestie mocowania i prowadzenia pomiarów

- wykonaj serię pomiarów ugięcia dla padania w płaszczyźnie wzdłuż rys
- oraz dla padania jak w podręczniku

3. W domu

- Sporządź wykresy porównujące uzyskane wyniki i przewidywania teoretyczne
- Przemysł, czy wybrana przez siebie aranżacja doświadczenia jest najprostsza ze względu na osiągnięcie celu

4. W drugim tygodniu

- Omów z asystentem pkt 3a+b
- Powtórz/uzupełnij pkt. 2

## III. ZAWARTOŚĆ RAPORTU

Należy omówić z prowadzącym, ale generalnie powinien zawierać:

- Model teoretyczny
- Schemat układu oraz jego zdjęcie
- Procedurę prowadzenia pomiarów
- Proste w zrozumieniu wykresy zależności teoretycznych i na ich tle zmierzonych punktów
- Konkluzje

## INFORMACJE DODATKOWE

### A. Transformacja Fouriera

Dowolną (fizycznie sensowną) funkcję  $f(x)$  można zapisać w postaci Transformaty Fouriera:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{f}(k) e^{ikx} \quad (8)$$

lub odwrotnie:

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2\pi} f(x) e^{-ikx}. \quad (9)$$

Mówimy że  $f(x)$  to funkcja w bazie położeniowej, zaś  $\tilde{f}(k)$  - w bazie wektorów falowych.

Transformacje te dramatycznie ułatwiają analizę zagadnień falowych, ponieważ umożliwią rozkład na fale płaskie.

## B. Funkcja Gaussa w położeniach i wektorach falowych

Dla rozeznania się co do natury bardzo wielu problemów szczególnie wygodnie stosować funkcję Gaussa:

$$f(x) = \frac{\exp(-x^2/(2w^2))}{\sqrt{w\sqrt{\pi}}} \quad (10)$$

$$\tilde{f}(k) = \sqrt{\frac{w}{\sqrt{\pi}}} \exp(-k^2 w^2/2) \quad (11)$$

*Narysuj 9.* Wykresy powyższych funkcji. Zaznacz ich szerokość. Jaka jest zależność między szerokością w bazie położeniowej a szerokością w bazie wektorów falowych?

*Narysuj\*.* Parametr  $2w^2$  można zastąpić dowolną liczbą zespoloną (zwyczajowo  $q$ ) i powyższa para funkcji pozostanie swoimi transformacjami Fouriera. Czy potrafisz wyrazić szerokości  $|f(x)|$  oraz  $|\tilde{f}(k)|$  przez  $q$ ? Czy potrafisz narysować na  $\arg f(x)$  oraz  $|f(x)|$  na jednym wykresie?

*Wniosek fizyczny* fala płaska jest nieskończenie rozciągnięta w przestrzeni. W rzeczywistości taka sytuacja nie jest osiągalna. Wiązka z rzeczywistego lasera, o ustalonej częstotliwości, zawsze ma skończoną średnicę. Tak się składa, że taka wiązka ma w przybliżeniu gaussowską zależność amplitudy od odległości od osi. Im szersza wiązka tym mniejszy rozrzut wektorów falowych.

*Zagadka\*.* Obejrzyj hasło „phased array”. Czy potrafisz powiązać przedstawioną tam animację z dotychczasowymi informacjami?

## C. Natężenie światła

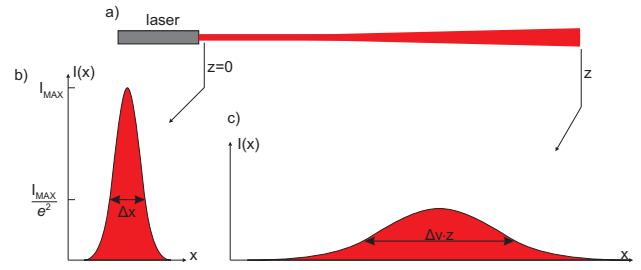
Natężenie światła  $I$  rejestrowane np. miernikiem mocy lub kamerą jest proporcjonalne do kwadratu pola

$$I = c\epsilon_0 |A|^2/2. \quad (12)$$

## D. Wiązka gaussowska

Można znaleźć takie rozwiązania równania falowego dla pola elektrycznego  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  które spełniają warunek brzegowy narzucany przez lustro wewnątrz lasera, że składowa pola równoległa do powierzchni lustra znika. Rozwiązania te mają postać sumy dwóch wiązek, poruszających się w lewo i w prawo, dokładnie jak w znanej wam fali stojącej. Aby spełnić warunki brzegowe, fronty falowe wiązek muszą dokładnie pasować do luster.

Okazuje się, że dobre rozwiązanie można utworzyć jako sumę dwóch przeciwniejących wiązek gaussowskich, czyli takich jakie emitowane są przez dobre lasery albo ze światłowodu jednomodowego, przykład przedstawia rysunek 1. Szerokość wiązki  $w(z)$  i promień krzywizny frontu falowego  $R(z)$  spełniają równania:



Rysunek 1. Przekroje przez wiązkę z lasera (a), które można zarejestrować za pomocą kamery wstawionej prostopadle do wiązki; (b) tuż za laserem szerokość wiązki na poziomie  $I_{\max}/e^2$  nazwiemy  $2w$  (c) daleko od lasera szerokość jest proporcjonalna do odległości  $z$  i wynosi  $2z\theta$  (również na wysokości  $1/e^2$ ), wobec czego naturalnie jest interpretować parametr proporcjonalności  $2\theta$  jako rozbieżność kątową wiązki.

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_R^2}} \quad z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$$

$$R(z) = z + \frac{z_R^2}{z}$$

gdzie  $w_0$  to szerokość w płaszczyźnie przewężenia  $z = 0$  zaś  $z$  to odległość od tej płaszczyzny.

*Narysuj\** wykres  $w(z)$  i osobno  $R(z)$  dla  $w_0 = 1$  mm oraz  $w_0 = 100 \mu\text{m}$ . Czy potrafisz obliczyć kąt rozbieżności  $\theta$  omówiony na rysunku 1? Jak zachowuje się promień krzywizny daleko od przewężenia?

## DODATKI TRUDNIEJSZE

### E. Dyskretna transformacja Fouriera (FFT)

Niech funkcja okresowa  $f(x)$  będzie przybliżona poprzez podanie jej wartości w punktach  $x_n = n\Delta/N$ ,  $f_n = f(x_n)$ . Dla opisanie funkcji o okresie  $\Delta$  wystarczy zatem  $N$  liczb (zespolonych)  $f_0 \dots f_{N-1}$ . Z warunku okresowości  $f(x_N) = f(x_0)$ . W typowych przypadkach dobierzmy  $N$  takie żeby funkcja od punktu do punktu zmieniała się powoli (tzw. oversampling - nadmierna liczba punktów).

$$\tilde{f}_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n \exp\left(-2i\pi \frac{kn}{N}\right)$$

$$f_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{f}_k \exp\left(2i\pi \frac{kn}{N}\right)$$

Zauważ, że tak zdefiniowana postać  $\tilde{f}_k$  również spełnia warunek okresowości  $\tilde{f}_{k+N} = \tilde{f}_k$ .

O liczbach  $\{f_n\}$  możemy myśleć jako o wektorze w przestrzeni  $N$  wymiarowej. Numeryczna transformata Fouriera to zmiana bazy wektora  $\{f_n\}$  z bazy położeniowej gdzie wektory bazy mają postać  $u_n = (0 \dots 1 \dots 0)$

do bazy postaci fal płaskich  $v_m = (1, w^m, w^{2m}, \dots, w^{-m})$  gdzie  $w = \exp(2i\pi/N)$ . Wzory transformacyjne sprowadzają się do zamiany bazy za pomocą mnożenia przez macierz.

## F. FFT a szereg Fouriera i Transformata Fouriera

### G. Wiązka jako superpozycja fal płaskich

Dowolne rozwiązanie równania falowego (17) da się złożyć jako ważona superpozycja fal płaskich:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \Re \int d^3\vec{k} \vec{A}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t}, \quad (13)$$

gdzie  $\vec{A}(\vec{k})$  jest amplitudą udziału fali płaskiej o wektorze falowym  $\vec{k}$  w superpozycji. Zważywszy, że  $\vec{A}(\vec{k})$  może być dosyć dowolną funkcją (i to wektorową zespoloną) możemy utworzyć bardzo wiele rozwiązań.

Wiązkę gaussowska konstruujemy biorąc do superpozycji fale o jednej częstości  $\omega$  biegnące pod niewielkimi kątami do osi  $z$ . Wygodnie przyjąć  $\vec{k} = (\alpha, \beta, \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2})k_0$ , gdzie  $k_0 = 2\pi/\lambda$ , zaś  $\alpha$  i  $\beta$  to rzuty kąta między wektorem falowym a osią  $z$  na płaszczyznę  $xz$  i  $yz$ . Fale odchylone o coraz większy kąt wchodzi do wiązki z coraz mniejszą wagą, określoną rozkładem Gaussowskim  $g(\alpha, \beta) = \exp[-k_0^2 w_0^2 (\alpha^2 + \beta^2)/4]$  gdzie  $w_0$  określa szerokość rozkładu. Aby wykonać całkę (13) weźmiemy pod uwagę jedynie małe kąty i przybliżmy, że  $\vec{A}(\vec{k})$  jest skierowane wzdłuż  $x$  oraz  $\sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} \simeq 1 - \alpha^2/2 - \beta^2/2$ . Przepiszmy 13:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \Re \tilde{A}_0 \hat{x} \int d\alpha \int d\beta g(\alpha, \beta) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t} \quad (14)$$

wykorzystując podane wyżej wyrażenia na  $\vec{k}$  możemy wypisać wyrażenie podcałkowe w postaci eksponenta od  $-k_0^2 w_0^2 (\alpha^2 + \beta^2)/4 + ik_0(\alpha x + \beta y) + ik_0 z - ik_0 z (\alpha^2 + \beta^2)/2 - i\omega t$ . Po uporządkowaniu względem potęg zmiennych całkowania możemy rozdzielić wyrażenie (14) na dwie niezależne całki. Po  $\alpha$  całkujemy  $\exp[ik_0 q(z)\alpha^2/2 + ik_0 x\alpha]$  gdzie  $q(z) = z + ik_0 w_0^2/2$  co da się wykonać (np. przez liniowe podstawienie korzystając z  $\int_{-\infty}^{\infty} dt \exp(-t^2) = \sqrt{\pi}$ ). Uzyskujemy wynik:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \Re \frac{2\pi \tilde{A}_0 \hat{x}}{k_0 q(z)} \exp\left(-ik_0 \frac{x^2 + y^2}{2q(z)}\right) e^{ik_0 z - i\omega t} \quad (15)$$

$$q(z) = z + i \frac{\pi w_0^2}{\lambda}. \quad (16)$$

Powyższe wyrażenie na  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  nietrudno zinterpretować:  $1/q(z)$  odpowiada za spadek amplitudy na środku wiązki wraz z jej rozplywaniem się na boki przy oddalaniu od przewężenia, część urojona wykładnika eksponenta będzie odpowiadać za lokalną fazę wiązki, natomiast część rzeczywista wykładnika  $\Re(-ikr^2/2q(z))$  za profil natężenia.

### H. Przyosiowe równanie falowe

Alternatywnie można powyższy wynik uzyskać wprost z r-r różniczkowych. Równania Maxwella opisujące pola elektryczne i magnetyczne można sprowadzić w pustej przestrzeni do jednego równania falowego na pole elektryczne:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (17)$$

Podstawiając do równania falowego (17) rozwiązanie postaci modulowanej przestrzennie fali płaskiej, czyli pakietu falowego  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \Re \vec{A}(\vec{r}, t) \exp(i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t)$  i dzieląc obustronnie przez eksponent dostaniemy:

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + 2ik \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} + 2 \frac{i\omega}{c^2} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - k^2 \vec{A} + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{A} = 0 \quad (18)$$

Dwa ostatnie wyrazy skasują się na mocy warunku  $\omega = c|k|$ . Z kolei zakładając, że amplituda pakietu  $A(\vec{r}, t)$  jest wolnozmienną funkcją swoich parametrów możemy zaniedbać wyższe pochodne po  $z$  oraz  $t$ . Dostaniemy:

$$2ik \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} + 2 \frac{i\omega}{c^2} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = - \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \vec{A} \quad (19)$$

dla fali monochromatycznej, takiej jak emitowana przez laser pracy ciągłej, amplitudy nie są zależne od czasu i drugi człon równania znika. Wobec tego możemy formalnie rozwiązać równanie uzyskując prawo transformacji pola od płaszczyzny początkowej  $z = 0$  do dowolnej innej płaszczyzny  $z = L$  w pustej przestrzeni:

$$\vec{A}(L) = \exp \left[ \frac{iL}{2k} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \right] \vec{A}(z = 0) \quad (20)$$