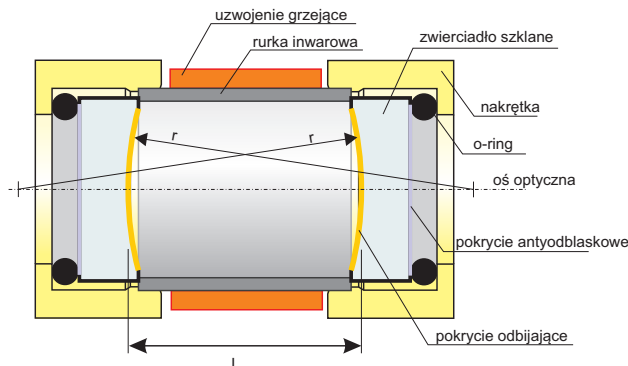


Interferometr Fabry-Pérot: pomiar rozszerzalności inwaru

Wojciech Wasilewski



Rysunek 1. Interferometr Fabry-Pérot z wklęsłymi lustrami – budowa wersji którą będziesz miał do dyspozycji na pracowni.

CELEM ĆWICZENIA JEST:

1. Obserwacja modów poprzecznych i podłużnych rezonatora optycznego z wklęsłymi lustrami
2. Obserwacja doświadczalna płynnego przejścia od optyki promieni (fotony jako cząstki) do optyki falowej (mechanika falowa “ruchu” fotonów)
3. Zapoznanie z laserem diodowym
4. Pomiar współczynnika rozszerzalności termicznej inwaru

Przed ćwiczeniem wykonaj wszystkie polecenia Oblicz, Wykonaj rysunek. Polecenia z * są trudniejsze — opcjonalne. Materiał sekcji I-III jest niezbędny do wykonania ćwiczenia. Sekcje VI-VIII są pomyślane jako dodatkowe informacje, natomiast ostatnie dwie sekcje napisałem tylko jako przewodnik do samodzielnych obliczeń dla bardziej teoretycznie zorientowanych studentów.

I. INTERFEROMETR FABRY-PÉROT

Interferometr składa się z dwóch identycznych lusterek wklęsłych o promieniu krzywizny $r = 100$ mm, ustawionych w odległości L_0 od siebie – oba są dociśnięte do rurki inwarowej. Lustro ma wielowarstwowe pokrycie dielektryczne które większość światła odbija a małą część przepuszcza. W odróżnieniu od lustro srebrnego absorpcja światła przez pokrycie jest minimalna.

Zadanie na pracowni. Przed zamocowaniem interferometru do stołu optycznego weź go razem z uchwytem do ręki (ostrożnie) i spojrzysz przez niego na lampkę. Zobacz też jaki kolor ma światło lampki odbite od zwierciadła interferometru. Co możesz powiedzieć o cha-

rakterystyce częstotliwościowej zwierciadeł na podstawie swojego eksperymentu? Za pomocą miernika mocy zmierz współczynnik odbicia R od lustro interferometru oraz ułamek mocy jaka przechodzi przez dwa lustro jeśli wiązki wychodzące z interferometru są wyraźnie rozdzielone.

Przez środki krzywizn lusterek można poprowadzić ich wspólną oś symetrii – oś optyczną interferometru.

Wykonaj rysunek. Na początku interferometr był ustawiony idealnie współosiowo z rurką inwarową. Następnie student odkręcił nakrętkę dociskającą jedno z lusterek i przy ponownym dokręcaniu przez nieuwagę doprowadził do tego, że lustro przesunęło się w bok 1mm (ale nie uległo żadnemu obrotowi, bo dociśnięte zostało do płaskiego czoła rurki). Jak zmieniło się położenie osi optycznej interferometru? Zaznacz na rysunku kąt między osiami (przed i po rozkręcaniu) i punkt ich przecięcia.

Interferometr tego typu nazywamy też wnęką rezonansową ponieważ można w nim pobudzić wyraźne rezonanse (fale stojące).

A. Interferometr idealnie ustawiony

Promień świetlny biegnący dokładnie wzdłuż osi optycznej po parzystej liczbie odbić wraca sam na siebie.

Oblicz 1. Jaka musi być relacja między długością fali λ a długością interferometru L żeby powstała fala stojąca?

Oblicz 2. Rozważmy dla równego rachunku interferometr długości $L_0 = 12$ mm oświetlony światłem o długości fali $\lambda_0 = 600$ nm. O ile musi się zmienić częstotliwość fali optycznej ν aby natrafić na kolejny rezonans? Wyraź wynik w jednostkach SI. Jakiej zmiany długości fali $\Delta\lambda$ odpowiada taka $\Delta\nu$?

Ponieważ lustro wypuszczają część promieniowania, fala stojąca pobudzona w interferometrze zanika w czasie. Analogicznie, światło wpuszczone z zewnątrz do interferometru odbija się w nim przez pewien czas.

Oblicz 3. Do interferometru wpuszczamy z zewnątrz bardzo krótki w porównaniu z długością interferometru $L_0 = 12$ mm impuls światła. Jaką nierówność musi spełniać czas trwania impulsu? Ponieważ impuls jest taki krótki to przy każdym odbiciu po prostu jego mała część wycieknie na przemian przez każde z lusterek. Naszkicuj natężenie światła wychodzącego z interferometru w funkcji czasu. Podpisz odległość między kolejnymi impulsami, naszkicuj krzywą przechodzącą przez maksima kolejnych impulsów. Po jakim czasie τ impuls wychodzący będzie e^2 razy słabszy niż pierwszy impuls wychodzący jeśli natężenie przechodzące przez lustro wynosi 1% padającego?

B. Pole wychodzące jako suma wkładów

Niech fala elektromagnetyczna padająca na interferometr będzie opisana wzorem:

$$E_x(x, y, z, t) = \Re A \exp(ikz - i\omega t),$$

gdzie E_x oznacza że jedynie pole elektryczne w osi x jest niezerowe (fala spolaryzowana liniowo), $k = 2\pi/\lambda = \omega/c$ nazywamy wektorem falowym, \Re oznacza część rzeczywistą zaś A jest amplitudą fali. Zauważ, że amplituda może być zespolona. Wówczas jej argument $\arg A$ decyduje o fazie fali, zaś moduł $|A|$ o maksymalnym polu elektrycznym. Fala taka biegnie w kierunku dodatnim osi z . Natężenie światła I rejestrowane np. miernikiem mocy lub kamerą jest proporcjonalne do kwadratu pola

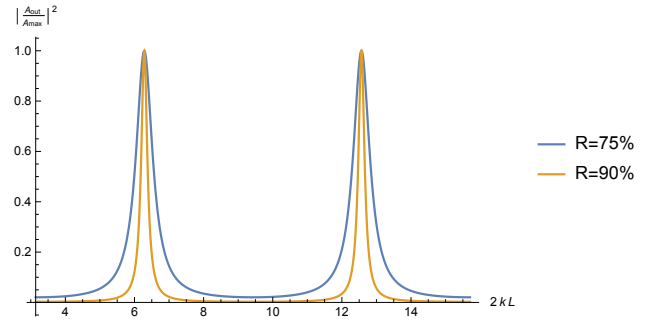
$$I = c\epsilon_0 |A|^2 / 2.$$

Przy odbiciu od lustra natężenie spada, $I_{\text{refl}} = RI_{\text{inc}}$ gdzie R jest natężeniowym współczynnikiem odbicia, zaś indeksy odnoszą się do fal padających - incident i odbitej - reflected. Wobec tego amplitudy fal (pola elektrycznego) będą związane zależnością: $E_{\text{refl}} = -\sqrt{R}E_{\text{inc}}$ (minus, czyli przesunięcie w fazie o π , ponieważ odbicie następuje od ośrodka gęstszego - możesz osobście to zobaczyć w ćwiczeniu z kablem koncentrycznym) oraz $E_{\text{transm}} = \sqrt{1-R}E_{\text{inc}}$ gdzie indeks odnosi się do fali przechodzącej - transmitted.

Jakie będzie pole elektryczne wychodzące z interferometru? Pole to składać się będzie z szeregu przyczynków. Największy odpowiada fali przechodzącej przez pierwsze i drugie lustro. Kolejny to fala która dodatkowo dwa razy się odbiła wewnątrz interferometru (tzn. przeszła, odbiła się, odbiła się, przeszła), następny przyczynek pochodzi od fali która odbiła się cztery razy itd. Napiszmy amplitudę pola pochodzące od podstawowego przyczynku. Wyniesie ono: $A_0 = \sqrt{1-R}\sqrt{1-R}A_{\text{in}}$. O słuszności tego wzoru możemy się przekonać porównując sytuację kiedy interferometru nie było i amplituda fali przychozącej z lasera wynosiła A_{in} i sytuację po wstawieniu w drogę fali interferometru, w której fala musiała dwukrotnie przejść przez lustra, osłabiając się za każdym razem. Amplituda pola pochodzącego od kolejnego przyczynku będzie się różnić od podstawowego przyczynku A_0 , bowiem biegnąca fala musiała się *dotatkowo* odbić od drugiego lustra, przebyć dodatkową drogę L , odbić od pierwszego lustra i znowu przebyć dodatkową drogę L . Wobec tego $A_1 = e^{ikL}\sqrt{R}e^{ikL}\sqrt{R}A_0$. Przepiszemy to do postaci $A_1 = uA_0$ gdzie $u = Re^{ikL}$. Łatwo zauważyć że każdy kolejny przyczynek różni się od poprzedniego dokładnie o u , czyli $A_n = u^n A_0$. Pole wychodzące z interferometru które zaobserwujemy będzie sumą wszystkich przyczynków

$$A_{\text{out}} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n A_0, \quad u = Re^{ikL}. \quad (1)$$

Łatwo obliczyć powyższą sumę i można narysować wykres natężenia światła przechodzącego przez interfero-



Rysunek 2. Natężenie światła przechodzącego przez idealnie ustawiony interferometr dla różnych współczynników odbicia luster.

metr $I_{\text{out}} \propto |A_{\text{out}}|^2$ w funkcji częstotliwości światła ω przedstawiony na rysunku 2.

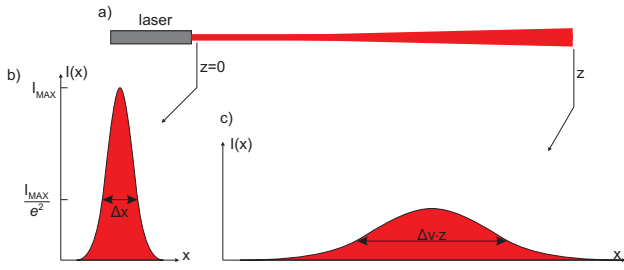
Skąd się bierze szerokość rezonansów? Do sumy wyrażającej pole na wyjściu interferometru (1) wchodzi z coraz to mniejszymi wagami R^n (co do modułu) wkłady odpowiadające coraz to większej liczbie obiegów n interferometru, które są opóźnione w fazie na skutek przebycia drogi optycznej $2nL$. Dokładnie w rezonansie wszystkie wkłady są ściśle w tej samej fazie. Ponieważ światło efektywnie obiega rezonator $F = 1/(1-R)$ razy, to aby transmisja istotnie spadła potrzeba żeby światło wychodzące po F obiegach było w przeciwfazie do światła przechodzącego wprost.

Alternatywne rozumowanie: fale stojące które poznaliśmy na wykładzie mają dobrze określoną częstotliwość. Na przykładzie interferometru widzimy subtelniejszy efekt - im dłużej τ fala stojąca może żyć w interferometrze (większy współczynnik odbicia luster R) tym węższy rezonans. Szerokość rezonansu $\Delta\omega$ jest odwrotnie proporcjonalna do τ .

*Rozważanie** Antek zamierza kupić na targu N laserów o mocy 5 mW, z których każdy z emituje wiązkę o amplitudzie A_0 . Antek zamierza połączyć wiązki wszystkich laserów, ponieważ obliczył że sumaryczna amplituda wyniesie NA_0 , dzięki czemu natężenie będzie się skalować jak N^2 . Połączoną wiązkę Antek zamierza użyć do napędu elektrowni termicznej o umiarkowanej sprawności 20%, która m.in. zasili lasery (sprawność 50%). Ile laserów musi kupić żeby wygenerować 500 W „darmowej” dodatkowej mocy?

II. MODY POPRZECZNE

W rzeczywistym interferometrze promienie mogą się rozchodzić nie tylko wzdłuż osi optycznej. Aby znaleźć fale stojące (mody własne) powinniśmy rozwiązać pełne równanie falowe. Dokonamy tego najpierw w przybliżeniu, mianowicie przypomnimy sobie rozwiązania dla dwuwymiarowej membrany. Rozważmy membranę której długość wzdłuż osi z wynosi $L = 12$ mm zaś szerokość wzdłuż osi x $d = 1$ mm. Mody rezonansowe są indekso-



Rysunek 3. Przekroje przez wiązkę z lasera (a), które można zarejestrować za pomocą kamery wstawionej prostopadle do wiązki; (b) tuż za laserem szerokość wiązki na poziomie I_{\max}/e^2 nazwiemy $2w$ (c) daleko od lasera szerokość jest proporcjonalna do odległości z i wynosi $2z\theta$ (również na wysokości $1/e^2$), wobec czego naturalnie jest interpretować parametr proporcjonalności 2θ jako rozbieżność kątową wiązki.

wane ilością węzłów n wzdłuż z oraz m wzdłuż x .

Oblicz 4. Znajdź dokładne częstotliwości rezonansów membrany w pobliżu długości fali $\lambda_0 = 600$ nm dla $m = 0, 1, 2$, najbliższych λ_0 o niższej i wyższej częstotliwości ν . Narysuj położenia na osi częstotliwości $\Delta\nu$ względem λ_0 . *Wskazówka:* a. Mathematica b. wzory można rozwinąć w szereg wykorzystując fakt że $m \ll n$.

Pełne rozwiązania

Można znaleźć takie rozwiązania równania falowego dla pola elektrycznego $\vec{E}(\vec{r}, t)$ które spełniają warunek brzegowy narzucany przez lustra, że składowa pola równoległa do powierzchni lustra znika. Rozwiązania te mają postać sumy dwóch wiązek, poruszających się w lewo i w prawo, dokładnie jak w znanej wam fali stojącej. Aby spełnić warunki brzegowe, fronty falowe wiązek muszą dokładnie pasować do luster.

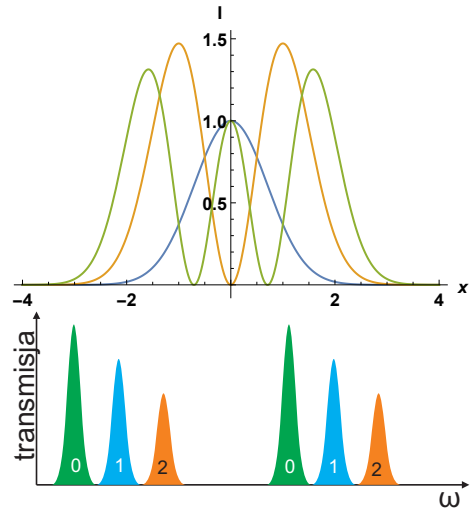
Okazuje się, że dobre rozwiązanie można utworzyć jako sumę dwóch przeciwbieżnych wiązek gaussowskich, czyli takich jakie emitowane są przez dobre lasery albo ze światłowodu jednomodowego, przykład przedstawia rysunek 3. Podstawowa wiązka gaussowska odpowiada $m = 0$ w przypadku membrany tzn. nie ma węzłów wzdłuż x . Szerokość wiązki $w(z)$ i promień krzywizny frontu falowego $R(z)$ spełniają równania:

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_R^2}} \quad z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$$

$$R(z) = z + \frac{z_R^2}{z}$$

gdzie w_0 to szerokość w płaszczyźnie przewężenia $z = 0$ zaś z to odległość od tej płaszczyzny.

*Narysuj** wykres $w(z)$ i osobno $R(z)$ dla $w_0 = 1$ mm oraz $w_0 = 100 \mu\text{m}$. Czy potrafisz obliczyć kąt rozbieżności θ omówiony na rysunku 3? Jak zachowuje się promień krzywizny daleko od przewężenia?



Rysunek 4. Wyższe mody interferometru Fabry-Perot. Górny panel: przekrój rozkładu natężenia $I(x) \propto |\vec{E}(x, 0, 0)|^2$ dla trzech pierwszych modów. Dolny panel: rezonanse wyższych modów są przesunięte w częstotliwościach.

W przypadku naszego interferometru wiązka jest najwęższa i ma płaski front falowy w połowie odległości między lustrami, natomiast na lustrach osiąga promień krzywizny r .

*Sprawdź** poprawność wzoru na średnicę modu podstawowego:

$$w_0^2 = \frac{L\lambda}{2\pi} \sqrt{2\frac{r}{L} - 1} \quad (2)$$

Oblicz 5 średnicę modu podstawowego w_0 w naszym interferometrze dla $L = 11$ mm, $r = 100$ mm, $\lambda = 650$ nm. Wynik wyraż w μm .

Mody wyższego rzędu

z węzłami $m > 0$, otrzymujemy różniczkując pole elektryczne rozwiązania podstawowego po x . Szkicujemy je na rysunku 4.

Pełna postać analityczna wiązki Gaussa-Hermita*

Wiązka biegnąca rzędu m, l ma postać $\vec{E}(\vec{r}, t) = \Re \vec{A} u_m(x, z) u_l(y, z) \exp(ikz - i\omega t + i\psi(z))$ gdzie:

$$u_n(x, z) = \frac{w_0}{w(z)} \exp\left(-ik \frac{x^2 + y^2}{2R(z)}\right)$$

$$\times H_n\left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)}\right) \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w^2(z)}\right)$$

$$\psi(z) = (m + l + 1) \arctan \frac{z}{z_R}$$

$H_n(\xi)$ to wielomian Hermita rzędu n , (np. $H_0 = 1$, $H_1 = 2\xi$), m i l to numery modu (liczby węzłów wzdłuż x i y), $2w_0$ jest średnicą wiązki w płaszczyźnie $z = 0$, $w(z)$ to średnica w dowolnej płaszczyźnie, $R(z)$ to promień krzywizny frontów falowych, $\psi(z)$ to tzw. faza Gouya zaś \vec{A} jest wektorem amplitudy koniecznie prostopadłym do z .

Zagadka* Niech $\vec{A} = \hat{x} + i\hat{y}$. Jakiemu kierunkowi pola elektrycznego (w funkcji czasu) odpowiada taka amplituda?

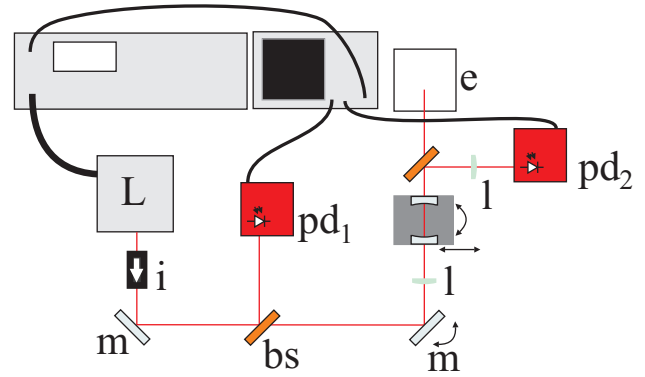
Oblicz* Rozważmy pole dokładnie na osi z , od lustra do lustra. Utwórz falę stojącą przez zsumowanie dwóch przeciwbieżnych biegnących. Czy węzły pola są równo odległe? Czy potrafisz obliczyć przesunięcie rezonansu o dowolnym m względem $m = 0$?

Oblicz* Aby się przekonać, że $R(z)$ w powyższym wzorze pełni rolę promienia krzywizny frontu falowego, narysuj powierzchnie stałej fazy pola w okolicy danego z . Które czynniki dają szybko zmienny wkład do fazy a które bardzo wolno zmienny? Jeśli przybliżyć te ostatnie jako stałe, to czy można się przekonać że powierzchnia stałej fazy jest paraboloidą obrotową z osią z ? **Wskazówka:** Z drugiej strony sfera o promieniu R przechodząca przez środek układu współrzędnych opisywana jest równaniem $R = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. Jakie są pierwsze nieznikające wyrazy rozwinięcia tego równania względem x i y ?

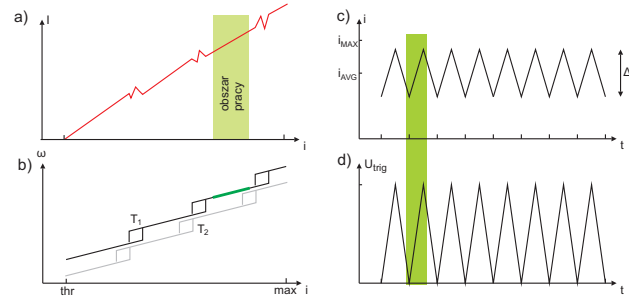
III. LASER DIODOWY

Długość fali światła emitowanego przez diodę jest bliska $\lambda_0 = 650$ nm i można ją w niewielkich granicach przestrajając poprzez zmianę prądu i oraz temperatury T diody laserowej. Nad obydwojma parametrami masz precyzyjną kontrolę. Zmiana temperatury trwa dłuższą chwilę, natomiast zmiana prądu może się odbywać bardzo szybko. Kontroler umożliwia generowanie trójkątnego w czasie przebiegu prądu w zakresie $i - \Delta i$ do $i + \Delta i$ z zadaną częstotliwością f , jak to przedstawia rysunek 6c. Jeśli $i - \Delta i < 0$ lub $i + \Delta i > i_{MAX}$ to kontroler automatycznie zmienia średni prąd i , aby zachować bezpieczny zakres zmiany prądu, ale nie wyświetla poprawionej wartości. Dodatkowo kontroler produkuje na wyjściu BNC napięcie trójkątne które służy do wyzwalań (trigger) oscyloskopu.

Narysuj 6 jeśli skanowanie zachodzi od prądu progowego aż do maksymalnego, to jak będzie wyglądać natężenie światła transmitowanego przez interferometr w funkcji czasu jeśli częstotliwość lasera zmienia się o około 30 GHz? Jak zmieni się ten wykres jeśli zmienimy temperaturę lasera? Jak należy zmienić i oraz Δi aby natężenie przechodzącego światła nie spadało nigdy poniżej 50% swojej maksymalnej możliwej wartości?



Rysunek 5. Układ optyczny do badania rezonatora Fabry-Perot. Wiązka z lasera L biegnie przez izolator optyczny i i dalej odbija się od lustra m i płytki światłdzielącej bs padając na fotodiode pd₁ która służy do pomiaru natężenia wychodzącego z lasera. Reszta wiązki odbija się od lustra i po zogniskowaniu soczewką l wpada do rezonatora umieszczonego na uchwycie przesuwno-obrotowym. Promienie wychodzące z rezonatora można dla wygody podzielić kolejną płytką światłdzielącą i obserwować na ekranie lub kamerą oraz skupić na fotodiode pd₂ celem pomiaru natężenia przechodzącego przez rezonator.



Rysunek 6. a-b) Typowa charakterystyka strojenia lasera diodowego. Laser przestrajamy zmieniając prąd płynący przez diodę i . Akcja laserowa zachodzi dla prądów większych niż progowy i_{thr} , nie można przekraczać prądu bezpiecznego i_{MAX} . W tym zakresie laser przestrajają się odcinkami płynnie, po czym następuje nagły przeskok częstotliwości ω . Należy dostosować zakres zmian prądu do zakresu płynnego skanowania wybierając sensowny „obszar pracy”. c-d) przebieg prądu i napięcia na wyjściu synchronizującym generowane przez zasilacz.

IV. PRZEBIEG ĆWICZENIA

1. Ustawienie wiązki

- Zapoznać się z laserem: ustawianie prądu i skanowanie, ustawianie temperatury
- Wiązkę z lasera przepuścić przez izolator optyczny, odbić od lustra i płytki światłdzielącej, skierować na fotodiode jak na rysunku 5
- Podłączyć sygnał z fotodiody i sygnał synchronizacyjny z lasera do oscyloskopu.

- (d) Zaobserwować zmiany natężenia światła w funkcji prądu. Sprawdzić co się dzieje, gdy ustawimy bardzo mały prąd i duży zakres skanowania $\Delta i > i$, a także gdy ustawimy $i + \Delta i > i_{\text{MAX}}$.
 - (e) Ustawić skanowanie od prądu progowego do maksymalnego. Ustawić podstawę czasu oscyloskopu i częstotliwość skanowania lasera oraz wyzwalać oscyloskopu tak, aby widzieć jedno zbocze z małym zapasem.
2. (opcjonalne) Zapoznać się z kamerą i oprogramowaniem do pomiaru kształtu i średnicy wiązki.
- (a) Za pomocą soczewki lub teleskopu sprowadzić wiązkę do rozmiaru obliczonego ze wzoru (2) w miejscu przewidzianym na środek interferometru.
3. Ustawienie interferometru
- (a) Kolejnymi dwoma lustrami skierować wiązkę do interferometru jak na rysunku 5.
 - (b) Zaobserwować przeciek przez interferometr. W razie braku przecieku ustawić interferometr na prostopadłe padanie np. używając karteczki z dziurką.
 - (c) Poprawić ustawienie wiązki oraz interferometru tak aby obserwować jedną plamkę światła na wyjściu
 - (d) Wstawić płytkę światłodzielną i drugą fotodiodę, zaobserwować widmo transmisji na oscyloskopie
4. Ustawić laser na kolejne maksima transmisji.
- (a) Poprzez zmienianie prądu średniego i oraz zakresu skanowania Δi skanować się w coraz węższym zakresie częstotliwości wokół wybranego maksimum transmisji
 - (b) Zaobserwować/zarejestrować na kamerze kształt wiązki przechodzącej.
5. (opcjonalnie) Dopasowanie średnicy wiązki z lasera do rozmiaru modu
- (a) Prześledzić ilościowo rozbieżność wiązki z interferometru dla modu podstawowego
 - (b) Ustaw teleskop aby uzyskać taką samą wiązkę "od tyłu" tzn. zbiegającą się
 - (c) Wpuść ją do interferometru. Zoptymalizuj położenie i kąt padania wiązki lustrami. Porównaj widmo transmisji z uzyskanym w 2.
6. (opcja) Pomiar magnetostrykcji inwaru
- (a) Z pomocą asystenta nawiń dodatkową cewkę na interferometr

- (b) Zaobserwuj zmiany widma transmisji gdy nagle włączasz/wyłączasz pole
- (c) Zmierz zależność wydłużenia od natężenia pola B

7. Pomiar współczynnika rozszerzalności cieplnej inwaru

- (a) Wykorzystaj uzwojenie nawinięte bifilarne na inwarową rurkę interferometru.
- (b) Zmierz jego oporność w temperaturze pokojowej, oraz oporność termistora zamocowanego w rurce inwarowej.
- (c) Podgrzewaj interferometr mierząc opór cewki grzejącej i termistora. Obserwuj zmiany widma transmisji.

V. ZAWARTOŚĆ RAPORTU

Należy omówić z prowadzącym, ale generalnie powinien zawierać:

1. Procedurę ustawienia układu
2. Zdjęcie obrazu wiązek wyciekających ze źle ustawionego rezonatora wraz z wyjaśnieniem sytuacji fizycznej. Opcjonalnie zdjęcia w dwóch płaszczyznach, bliskiej i dalekiej
3. Przykładowe widmo transmisji z zaznaczoną skalą częstotliwości
4. Zdjęcia dwóch modów rezonatora
5. Wykres położenia modu od temperatury
6. Wyznaczony współczynnik rozszerzalności z komentarzem

INFORMACJE DODATKOWE

W tym ćwiczeniu możesz zobaczyć jak działa interferometr (nie działa) gdy jest ustawiony krzywo i wiązka wpadająca obiega go praktycznie bez interferencji, zgodnie z prawami optyki geometrycznej. Możesz także zobaczyć takie działanie które wprost ilustruje zasady optyki falowej, gdy interferometr jest ustawiony prosto i wiązka dobrze pasuje do modu podstawowego. Przejście pomiędzy tymi sytuacjami jest płynne i możliwe do obserwacji poprzez pokręcanie elementami optycznymi. Poniżej pokazujemy, że interferometr jest urządzeniem analogicznym do oscylatora harmonicznego a obserwowane przejście - zachodzi identycznie jak przejście od mechaniki klasycznej do kwantowej. Ścisły opis teoretyczny takiego przejścia znacznie wykracza poza ramy pracowni, ale mimo to podajemy trochę przykrojonych informacji które mam nadzieje pozwolą chętnym lepiej się przygotować do zrozumienia mechaniki kwantowej w przyszłości.

Polecenia *oblicz* etc. poniżej tego punktu są opcjonalne, aczkolwiek zalecane przynajmniej do przemyślenia.

VI. PRZESTRZEŃ FAZOWA OSCYLATORA HARMONICZNEGO

Oscylator harmoniczny (wahadełko, masa na sprężynie etc.) kanonicznie rzecz biorąc spełnia równania $\dot{x} = p/m$ oraz $\dot{p} = -kx$. Każdy z Was potrafi rozwiązać równania, tutaj przepiszemy te rozwiązania w formie która okaże się analogiczna do czegoś zupełnie innego... Przygotujmy się do nakręcenia filmu ze zbliżeniami na ruch oscylatora. Od klatki do klatki mija czas Δt . Zauważmy, że:

$$\begin{pmatrix} \frac{x(t+\Delta t)}{x_{\max}} \\ \frac{p(t+\Delta t)}{p_{\max}} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}}_{\mathbf{R}(\alpha=\omega\Delta t)} \begin{pmatrix} \frac{x(t)}{x_{\max}} \\ \frac{p(t)}{p_{\max}} \end{pmatrix},$$

gdzie x_{\max} i p_{\max} to maksymalne osiągnięte wychylenie i pęd. Można to przepisać w formie:

$$\begin{pmatrix} x(t+\Delta t) \\ p(t+\Delta t) \end{pmatrix} = \underbrace{\mathbf{S}\mathbf{R}(\omega\Delta t)\mathbf{S}^{-1}}_{\mathbf{U}(\alpha=\omega\Delta t)} \begin{pmatrix} x(t) \\ p(t) \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} x_{\max} & 0 \\ 0 & p_{\max} \end{pmatrix} \quad (4)$$

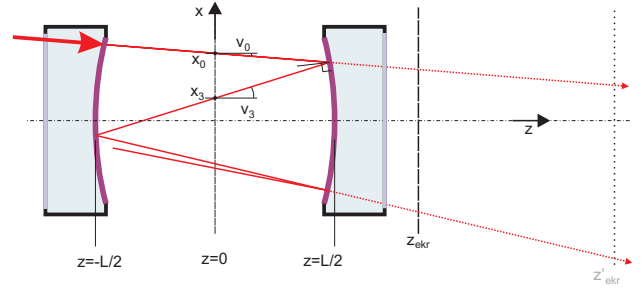
Wykonaj rysunek. Płaszczyznę x - p nazywamy przestrzenią fazową. Narysuj krzywą stałej energii $E = \text{const}$ na tej płaszczyźnie. Niech okres oscylatora wynosi 160 ms. Zaznacz stan oscylatora w 8 kolejnych klatkach filmu, jeśli na początku pęd był zerowy a energia oscylatora odpowiadała narysowanej poprzednio krzywej.

Oblicz¹. Macierz $\mathbf{U}(\alpha)$. Jaki wymiar mają poszczególne jej elementy? Jaki wymiar mają elementy macierzy \mathbf{R} ? Czy można zależność macierzy $\mathbf{U}(\alpha)$ od x_{\max} i p_{\max} zastąpić zależnością od jednego parametru?

Oblicz Sprawdź że energię można wyrazić wzorem $E/E_0 = (x/x_{\max})^2 + (p/p_{\max})^2$ gdzie E_0 jest energią początkową. Zapisz energię jako $E/E_0 = |\vec{\xi}|^2$ gdzie $\vec{\xi}$ jest wektorem uzyskanym przez podziałanie pewną macierzą $\mathbf{\Sigma}$ na wektor $(x(t), p(t))$. Jaka to macierz? Jak zmienia się wektor $\vec{\xi}$ po upływie czasu Δt ?

Oblicz.* Jakie warunki musi spełniać dowolna macierz \mathbf{V} żebyśmy po wstawieniu jej do r-r (3) zamiast $\mathbf{U}(\alpha)$ dostali przekształcenie zachowujące energię?

Oblicz.* Czy potrafisz tak zmienić jednostki (sugerujemy zmianę jednostki długości) żeby $\mathbf{U}(\alpha) = \mathbf{R}(\alpha)$?



Rysunek 7. Bieg promieni w interferometrze - przekrój. Zaniedbaliśmy załamanie na granicy powietrze szkło (niewielki efekt) oraz znacznie rozciągnęliśmy rysunek w pionie dla lepszej czytelności - skutkiem tego kąty są większe niż rzeczywiste.

VII. BIEG PROMIENI W INTERFEROMETRZE

Co się stanie jeśli promień nie biegnie wzdłuż osi? Ponieważ nasz interferometr jest symetryczny, prześledzimy sytuację poczynawszy od płaszczyzny leżącej w połowie odległości między lustrami i prostopadłej do osi optycznej z , zdefiniowanej równaniem $z = 0$. Rozważmy najpierw promień zawarte w płaszczyźnie poziomej xz . Weźmy promień przecinający płaszczyznę $z = 0$ w punkcie x_0 i biegnący pod kątem do osi z którego tangens dx/dz wynosi v_0 (rys. 7). Promień ten uderzy w lustro w punkcie $x_1 = x_0 + v_0 L/2$. Bieg do lustra nie zmienia nachylenia promienia $v_1 = v_0$. Przy odbiciu od lustra zmianie nie ulegnie położenie $x_2 = x_1$ ale zmieni się kąt biegu promienia, ponieważ w odległości x_1 od osi normalna do powierzchni lustra jest nachylona do osi z pod kątem x_1/R . Wobec tego $v_2 = v_1 - 2x_1/R$. Następnie promień biegnie z powrotem do płaszczyzny $z = 0$ którą przetnie w punkcie $x_3 = x_2 + v_2 L/2$. Ewolucję taką można elegancko zapisać w formie macierzowej:

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ v_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & L/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/R & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{U}} \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Oblicz macierz \mathbf{U} . Jakie jednostki mają poszczególne elementy tej macierzy?

Oblicz znajdź taką macierz diagonalną skalowania $\mathbf{S} = \text{diag}(h, 1) = \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ żeby $\mathbf{U} = \mathbf{S}\mathbf{R}(\alpha)\mathbf{S}^{-1}$. Wskazówka: użyj dwóch równań z $\sin \alpha$ aby wyznaczyć h . Użyj równań z $\cos \alpha$ aby wyznaczyć α . Jaka jest jednostka długości h i kąt obrotu α ? Jaka jest relacja między długością wektora $\mathbf{S}^{-1}\vec{p}$ a wektora $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{U}\vec{p}$ gdzie $\vec{p} = (x, v)$ określa dowolny promień?

A. Przestrzeń fazowa promieni świetlnych

Podanie współrzędnych punktu w jakim promień świetlny przecina płaszczyznę oraz nachylenia promienia

¹ Zakładam że potrafisz mnożyć macierze. Jeśli nie, protestuj na algebrze. W Mathematica macierz wpisuje się jako $\{\{1,2\},\{3,4\}\}$, ładnie wyświetla poleceniem MatrixForm, vide Help - „Matrix Operations”

wystarczy aby go jednoznacznie określić. W przypadku promieni biegnących w płaszczyźnie xz wystarczy dwie liczby oznaczane wyżej (x_i, v_i) .

Wykonaj rysunek. Oblicz wartości liczbowe macierzy U dla $r = 100$ mm i $L_0 = 20$ mm. Do interferometru wpuściliśmy promień poziomo w odległości 1 mm od osi. Zaznacz położenia i nachylenia z którymi 3 kolejne promienie odbitych będą przecinać płaszczyznę $z = 0$. Czy potrafisz zaznaczyć krzywą na której znajdzie się promień po dowolnej liczbie odbić?

B. Obraz na ekranie

Przy każdym odbiciu część światła wycieka z interferometru (rys. 7). Za interferometrem możemy ustawić ekran i zaobserwować ich położenie na ekranie. Zauważ że jeśli ekran jest daleko to z położenia na ekranie można wywnioskować praktycznie tylko nachylenie v .

*Rozważanie** Czy potrafisz użyć soczewki umieszczonej za interferometrem w taki sposób, aby na odpowiednio ustawionym ekranie zaobserwować jedynie x z płaszczyzny $z = 0$ bez żadnego wkładu nachylenia v ? Czy potrafisz obliczyć odpowiednie odległości jeśli zdradzimy że przejście promienia od środka interferometru do soczewki ustawionej w odległości d_1 , przez soczewkę o ogniskowej f i dalej odległość d_2 do ekranu opisuje się macierzą:

$$\begin{pmatrix} x_e \\ v_e \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & d_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_O \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

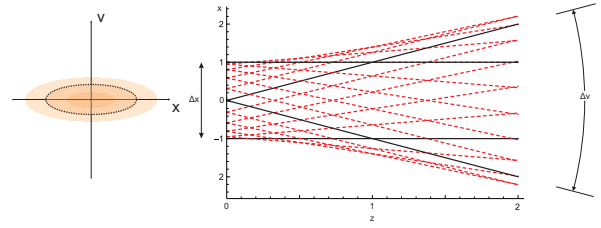
C. Bieg promieni w interferometrze - 3D

Bieg promieni w 3 wymiarach pozostaje w takiej relacji do biegu w dwóch wymiarach, jak wahadło na nici wahające się po elipsie w stosunku do wahadła którego ruch zawiera się całkiem w płaszczyźnie xz . Dodanie dodatkowego wymiaru nie wnosi wiele nowego ponad znaczną komplikację notacji i rysunków.

Matematycznie rzecz biorąc wyżej omawialiśmy bieg promieni dla których $y = 0$, podając $x(z = 0)$ oraz $v = dx/dz|_{z=0}$. Uogólnienie trójwymiarowe polegać będzie na podawaniu 4 wartości dla określenia promienia: $x(z = 0)$, $dx/dz|_{z=0}$, $y(z = 0)$, oraz $dy/dz|_{z=0}$. W układach optycznych o symetrii osiowej, takich jak nasz interferometr, parametry te są parami niezależne (nie mieszają się ze sobą) oraz zmieniają się według takich samych prawideł. Wyjątkiem są np. okulary korygujące astygmatyzm, czy astygmatyka, oraz pryzmaty.

VIII. WIĄZKA Z PROMIENI

Jak już pewnie każdy osobiście mógł się przekonać przybliżeniem promienia świetlnego jest wiązka emitowa-



Rysunek 8. Konstrukcja wiązki gaussowskiej z promieni. (a) Przestrzeń fazowa najmniejszego zespołu promieni spełniającego zasadę nieoznaczoności (6), (b) widok promieni.

wana z lasera. Nietrudno zmierzyć dokładność tego przybliżenia. Im bardziej próbujemy ogniskować wiązkę, tym szybciej się ona rozbiega. Im usilniej wycinamy z niej cienki promień np. przysłoną czy szczeliną, tym ponownie, szybciej się ona rozbiega na boki. Mierzając przekrój wiązki kamerą dostajemy typowo przekroje przedstawione na rysunku 3.

Oblicz dla rozkładu gaussa o odchyleniu standardowym σ jego szerokość na wysokości $1/e^2$ oraz na wysokości $1/2$ maksimum (Full Width Half Maximum - FWHM).

Matematycznie ograniczanie dane jest *zasadą nieoznaczoności*. Aby ją sformułować dla światła o długości fali λ nazwiemy szerokość wiązki w dowolnie wybranej płaszczyźnie Δx . Wówczas okazuje się, że rozbieżność kątów pod jakimi światło rozchodzi się z tej płaszczyzny Δv musi spełniać nierówność

$$4\pi\Delta x\Delta v \geq \lambda \quad (6)$$

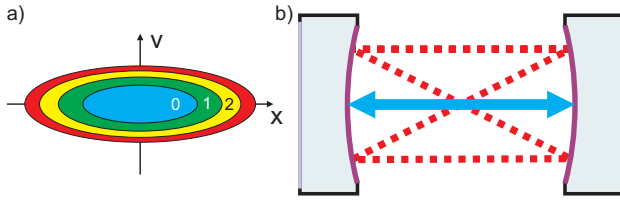
Oznacza to, że nie można z fal stworzyć cienie wiązki (małe Δx) która by się nie rozbiegała (małe Δv).

Spróbujmy skonstruować z promieni wiązkę która ma minimalny możliwy iloczyn $\Delta x\Delta v$. W tym celu narysujmy na płaszczyźnie fazowej promieni świetlnych (x, v) elipsę która odpowiada przypadkowi granicznemu zasady nieoznaczoności (przerywany kontur z rys. 8a). Następnie z tej elipsy wybierzmy szereg punktów, które reprezentują konkretne promienie o danych (x, v) i narysujmy bieg tych promieni w przestrzeni. Otrzymamy w ten sposób kontur wiązki gaussowskiej przedstawiony na rysunku 8b. Wyróżniliśmy promienie o największych możliwych wartościach x i v .

Oblicz wiązka wychodząca z lasera w znacznej od niego odległości osiągnęła rozmiar 1 mm. Wstawiamy w tej płaszczyźnie soczewkę o ogniskowej $f = 100$ mm i obserwujemy że wiązka osiąga przewężenie praktycznie w odległości 100 mm od soczewki. Naszkiecuj obrys wiązki. Jaka jest Δv dla zbiegającej się wiązki? Jakiego spodziewamy się wobec tego Δx ? Długość fali wynosi 650 nm.

A. Podstawowy mod poprzeczny interferometru

Połączenie podanych wyżej informacji prowadzi do wniosku, że dla każdego interferometru (dane r i L) istnieje *wiązka gaussowska która obiegając interferometr*



Rysunek 9. Wyższe mody interferometru Fabry-Perot. a) mod podstawowy 0 zajmuje minimalną możliwą powierzchnię (najmniejsza elipsa), a kolejne mody są powierzchniowo $n + 1$ razy większe. b) wyższe mody zawierają promienie dalsze od osi i daleko droga optyczna jaką pokonują w jednym obiegu wewnątrz jest większa niż mod podstawowy, dlatego rezonanse wyższych modów są przesunięte w częstotliwościach.

przechodzi sama na siebie. Rzeczywiście, znajdziemy taką elipsę w przestrzeni fazowej (x, v) żeby obieg rezonatora opisywany wzorem (5) przeprowadzał dowolny punkt z elipsy na inny punkt na tej samej elipsie a jednocześnie żeby elipsa wysyciała nierówność 6.

Droga optyczna promień biegnący dokładnie wzdłuż osi optycznej przebiega drogę $2L$ na każdy obieg interferometru. W skład wiązki gaussowskiej wchodzi jednak promienie oddalone od osi oraz biegnące pod kątem, co powoduje że efektywna (średnia) droga optyczna jaką światło przebywa w każdym obiegu jest odrobinę większa niż $2L$. Jest to tzw. faza Guoya. Z tego powodu rezonans interferometru z wklęsłymi lustrami jest przesunięty w stosunku do rezonansu interferometru z płaskimi lustrami ustawionymi w tej samej odległości.

B. Wyższe mody poprzeczne

Uczciwie wyznaczenie wyższych modów interferometru wymaga rozwiązania równania falowego z warunkami brzegowymi narzuconymi przez wklęsłe lustra. Tutaj zaprezentujemy tylko pobieżnie wynik pozostawiając Wam zadanie na kolejne lata. Okazuje się, że o ile mod podstawowy zajmuje najmniejszą możliwą elipsę w przestrzeni fazowej która przechodzi sama na siebie, to wyższe mody zajmują progresywnie coraz to większe elipsy jak to przedstawia rysunek 9a. Wobec tego w wkład do wyższych modów dają promienie coraz dalsze od osi optycznej. Z tego powodu droga optyczna jaką efektywnie przebiegają wyższe mody jest większa niż dla modu podstawowego. Powoduje to że poszczególne mody są w rezonansie dla nieco innych częstotliwości jak to przedstawia rysunek 9c.

DODATKI TRUDNIEJSZE

IX. KONSTRUKCJA FALOWA WIĄZKI GAUSSOWSKIEJ

A. Fala płaska

Równania Maxwella opisujące pola elektryczne i magnetyczne można sprowadzić w pustej przestrzeni do jednego równania falowego na pole elektryczne:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (7)$$

Jednym z możliwych kompletów rozwiązań tego równania są fale płaskie $\vec{E}(\vec{r}, t) = \Re \vec{A} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t)$ oraz $\omega = c|k|$. Dodatkowo ze znikania dywergencji pola elektrycznego dostajemy warunek poprzeczności fali: $\vec{k} \cdot \vec{A} = 0$ (patrz np. Griffiths).

Fala płaska jest jednak nieskończenie rozciągnięta. Fizycznie reprezentuje przypadek $\Delta x \rightarrow \infty$ przy jednocześnie bardzo dobrze określonym, zadanym wektorem falowym \vec{k} kierunku, czyli $\Delta v \rightarrow 0$.

B. Superpozycja fal płaskich

Dowolne rozwiązanie równania falowego (7) da się złożyć jako ważona superpozycja fal płaskich:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \Re \int d^3 \vec{k} \vec{A}(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t}, \quad (8)$$

gdzie $\vec{A}(\vec{k})$ jest amplitudą udziału fali płaskiej o wektorze falowym \vec{k} w superpozycji. Zważywszy, że $\vec{A}(\vec{k})$ może być dosyć dowolną funkcją (i to wektorową zespoloną) możemy utworzyć bardzo wiele rozwiązań.

Wiązkę gaussowską konstruujemy biorąc do superpozycji fale o jednej częstotliwości ω biegnące pod niewielkimi kątami do osi z . Wygodnie przyjmując $\vec{k} = (\alpha, \beta, \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2})k_0$, gdzie $k_0 = 2\pi/\lambda$, zaś α i β to rzuty kąta między wektorem falowym a osią z na płaszczyznę xz i yz . Fale odchylone o coraz większy kąt wchodzi do wiązki z coraz mniejszą wagą, określoną rozkładem Gaussowskim $g(\alpha, \beta) = \exp[-k_0^2 w_0^2 (\alpha^2 + \beta^2)/4]$ gdzie w_0 określa szerokość rozkładu. Aby wykonać całkę (8) weźmiemy pod uwagę jedynie małe kąty i przybliżmy, że $\vec{A}(\vec{k})$ jest skierowane wzdłuż x oraz $\sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} \approx 1 - \alpha^2/2 - \beta^2/2$. Przepiszmy 8:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \Re \tilde{A}_0 \hat{x} \int d\alpha \int d\beta g(\alpha, \beta) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t} \quad (9)$$

wykorzystując podane wyżej wyrażenia na \vec{k} możemy wypisać wyrażenie podcałkowe w postaci eksponenta od $-k_0^2 w_0^2 (\alpha^2 + \beta^2)/4 + ik_0(\alpha x + \beta y) + ik_0 z -$

$ik_0z(\alpha^2 + \beta^2)/2 - i\omega t$. Po uporządkowaniu względem potęg zmiennych całkowania możemy rozdzielić wyrażenie (9) na dwie niezależne całki. Po α całkujemy $\exp[ik_0q(z)\alpha^2/2 + ik_0x\alpha]$ gdzie $q(z) = z + ik_0w_0^2/2$ co da się wykonać (np. przez liniowe podstawienie korzystając z $\int_{-\infty}^{\infty} dt \exp(-t^2) = \sqrt{\pi}$). Uzyskujemy wynik:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \Re \frac{2\pi \tilde{A}_0 \hat{x}}{k_0 q(z)} \exp\left(-ik_0 \frac{x^2 + y^2}{2q(z)}\right) e^{ik_0z - i\omega t} \quad (10)$$

$$q(z) = z + i \frac{\pi w_0^2}{\lambda}. \quad (11)$$

Powyższe wyrażenie na $\vec{E}(\vec{r}, t)$ nietrudno zinterpretować: $1/q(z)$ odpowiada za spadek amplitudy na środku wiązki wraz z jej rozplływaniem się na boki przy oddalaniu od przewężenia, część urojona wykładnika eksponensa będzie odpowiadać za lokalną fazę wiązki, natomiast część rzeczywista wykładnika $\Re(-ikr^2/2q(z))$ za profil natężenia.

X. RÓWNOWAŻNOŚĆ POŁA I TORÓW CZĄSTEK

A. Przyosiowe równanie falowe

Podstawiając do równania falowego (7) rozwiązanie postaci modulowanej przestrzennie fali płaskiej, czyli pakietu falowego $\vec{E}(\vec{r}, t) = \Re \vec{A}(\vec{r}, t) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t)$ i dzieląc obustronnie przez eksponens dostaniemy:

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + 2ik \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} + 2 \frac{i\omega}{c^2} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - k^2 \vec{A} + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{A} = 0 \quad (12)$$

Dwa ostatnie wyrazy skasują się na mocy warunku $\omega = c|k|$. Z kolei zakładając, że amplituda pakietu $A(\vec{r}, t)$ jest wolnozmienną funkcją swoich parametrów możemy zaniedbać wyższe pochodne po z oraz t . Dostaniemy:

$$2ik \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} + 2 \frac{i\omega}{c^2} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \vec{A} \quad (13)$$

dla fali monochromatycznej, takiej jak emitowana przez laser pracy ciągłej, amplitudy nie są zależne od czasu i drugi człon równania znika. Wobec tego możemy formalnie rozwiązać równanie uzyskując prawo transformacji pola od płaszczyzny początkowej $z = 0$ do dowolnej innej płaszczyzny $z = L$ w pustej przestrzeni:

$$\vec{A}(L) = \exp \left[\frac{iL}{2k} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \right] \vec{A}(z = 0) \quad (14)$$

B. Przejście przez soczewkę

Role soczewki jest wyrównanie dróg optycznych. Pęk promieni równoległych trafia do jednego punktu w odle-

głości f od soczewki. Aby tak się stało, promienie biegnące daleko od środka muszą zostać przyspieszone w stosunku do promieni biegnących przez środek. Odpowiada to wprowadzeniu przesunięcia fazowego:

$$\vec{A}' = \exp \left[\frac{ik}{2f} (x^2 + y^2) \right] \vec{A} \quad (15)$$

C. Rozkład położenia i kierunków

Dla układów optycznych w których transformacja parametrów promieni (x, v) jest liniowa (czyli stosuje się przybliżenie przyosiowe), prawdziwa jest równoważność dwóch sposobów obliczania rozkładu natężenia światła w dowolnej płaszczyźnie z :

1. z pola elektromagnetycznego będącego rozwiązaniem równań Maxwella,
2. z rozkładu wag promieni $W(\vec{r}, \vec{v})$ zwanego funkcją Wignera

Funkcję Wignera można obliczyć z amplitudy $A(\vec{r}, t)$. Wypiszemy wzór jednowymiarowy:

$$W(x, v) = \frac{k_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi A^*(x + \xi) A(x - \xi) e^{-2ik_0\xi v} \quad (16)$$

Następujące stwierdzenia można sprawdzić w jednym wymiarze x (i następnie uogólnić formalizm):

1. Rozkład natężenia światła w płaszczyźnie odniesienia $z = 0$ jest proporcjonalny do $|A(x)|^2$. Taki sam jest rozkład gęstości promieni $\rho(x)$. Ponieważ gęstość promieni w danym punkcie x zupełnie nie zależy od ich kąta v to $\rho(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dv W(x, v)$. Rzeczywiście wykorzystując definicje dojdziemy do proporcjonalności. Należy wykorzystać tożsamości $\int dx \delta(x - a) f(x) = f(a)$ oraz $\int dx \exp(ikx) = 2\pi \delta(k)$.
2. Niech od płaszczyzny odniesienia światło propaguje się przez układ optyczny złożony z soczewek i obszarów pustej przestrzeni. Wówczas amplituda pola zmienia się zgodnie z prawami (14) oraz (15). Można sprawdzić, krok po kroku, że funkcja Wignera obliczona po ewolucji tak się ma do funkcji Wignera początkowej, jakby w funkcji początkowej dokonać transformacji współrzędnych (x, v) identycznie jak dla promieni. Sprawdzenie transformacji soczewka jest łatwiejsze. Sprawdzenie transformacji w pustej przestrzeni dokonujemy przeliczając pochodne przestrzenne z wykorzystaniem całkowania przez części.