

ZADANIE 09

BADANIE WIDMA LINIOWEGO ZA POMOCĄ SPEKTROMETRU

Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie długości fali wybranych linii widmowych neonu oraz krawędzi widma światła białego. Fizycznej podstawy pomiaru dostarcza zjawisko dyspersji światła w materii, tj. zależności $n = f(\lambda)$ współczynnika załamania n od długości λ fali, co prowadzi do rozszczepienia światła w pryzmacie. Metoda pomiaru wykorzystuje zjawisko najmniejszego kąta odchylenia światła w pryzmacie i relacji między tym kątem a współczynnikiem załamania. Goniometryczny pomiar kątów ugięcia promieni odpowiadających liniom widmowym helu i wodoru o znanych długościach fal i wyznaczenie współczynnika załamania dla tych fal pozwala skalibrować układ i, w konsekwencji, zmierzyć nieznaną długość fali światła emitowanego przez inne źródło.

Masz do dyspozycji

- goniometr;
- pryzmat szklany;
- lampę widmową helową, wodorową, neonową i światła białego.

Wykonanie ćwiczenia

- zapoznaj się z budową i obsługą goniometru;
- przygotuj goniometr do pomiarów;
- wykonaj pomiar kąta łamiącego pryzmatu;
- wykonaj pomiary kątów najmniejszego odchylenia prążków widmowych helu i wodoru;
- wykonaj pomiar kąta najmniejszego odchylenia przynajmniej jednego, najlepiej widocznego (w Twojej opinii) prążka widmowego neonu;
- wykonaj pomiary kątów najmniejszego odchylenia krańców widma ciągłego światła białego.

Literatura

- Sz. Szczeniowski, *Fizyka doświadczalna* Część IV – Optyka, Warszawa, 1983;
- D. Halliday, R. Resnick i J. Walker, *Podstawy fizyki*, t. 5, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2003;
- H. Szydłowski, *Pracownia fizyczna wspomagana komputerem*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, szereg wydań w latach 2003 ÷ 2012 ;
- J.R. Meyer-Arendt, *Wstęp do optyki*, PWN, Warszawa, 1977;
- A. Zięba, *Analiza danych w naukach ścisłych i technice*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2013.

ZADANIE O9

BADANIE WIDMA LINIOWEGO ZA POMOCĄ SPEKTROMETRU

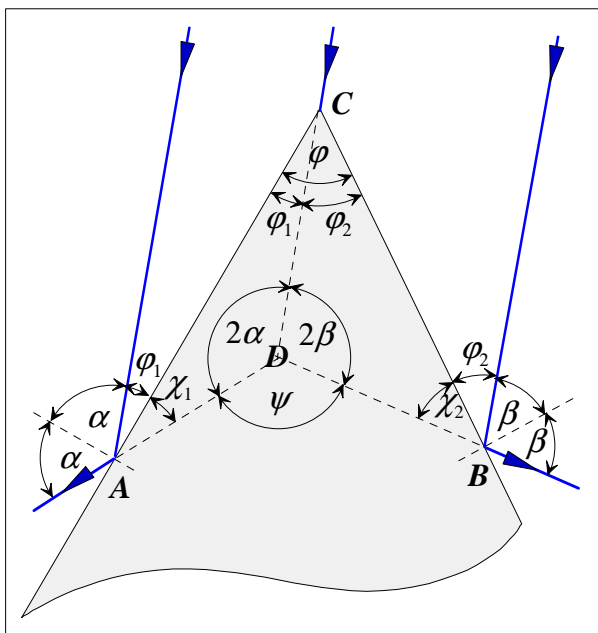
Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie długości fali wybranych linii widmowych neonu oraz krawędzi widma światła białego. Fizycznej podstawy pomiaru dostarcza zjawisko dyspersji światła w materii, tj. zależności $n = f(\lambda)$ współczynnika załamania n od długości λ fali, co prowadzi do rozszczepienia światła w pryzmacie. Metoda pomiaru wykorzystuje zjawisko najmniejszego kąta odchylenia światła w pryzmacie i relacji między tym kątem a współczynnikiem załamania. Goniometryczny pomiar kątów ugięcia promieni odpowiadających liniom widmowym helu i wodoru o znanych długościach fal i wyznaczenie współczynnika załamania dla tych fal pozwala skalibrować układ i, w konsekwencji, zmierzyć nieznaną długość fali światła emitowanego przez inne źródło.

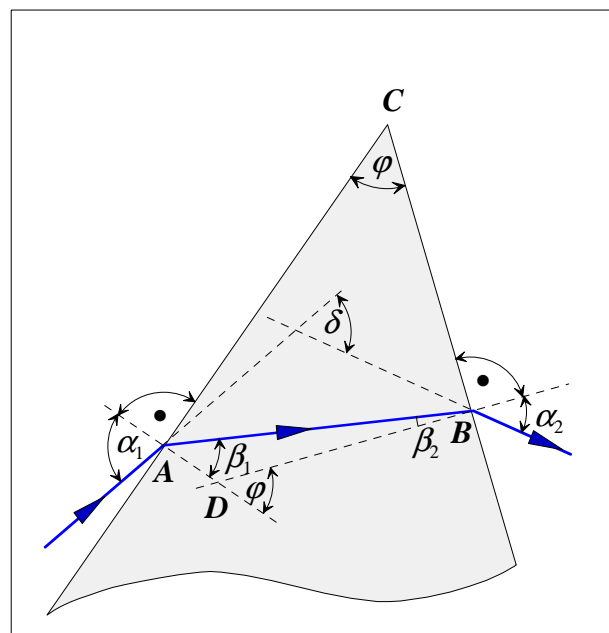
Wprowadzenie

Wykorzystanie goniometru z pryzmatem jako spektrometru służącego do pomiaru długości fali wymaga uprzedniej jego kalibracji, czyli wyznaczenia zależności między długością fali a wielkością mierzoną za pomocą spektrometru. W układzie goniometru z pryzmatem naturalnym wyborem takiej wielkości jest odchylenie δ promienia od jego pierwotnego kierunku, a więc wyznaczenie krzywej $\delta = f(\lambda)$ tzw. dyspersji kątowej. Inny wybór odwołuje się np. do kąta mierzącego odległość rozważanej linii od innej, uprzednio wybranej, linii. W niniejszym ćwiczeniu wykorzystywany jest współczynnik załamania n wyznaczany z minimalnego kąta δ_{\min} odchylenia promienia w pryzmacie, a co za tym idzie, krzywej $n = f(\lambda)$.

Związek między współczynnikiem załamania n a kątem δ_{\min} najmniejszego odchylenia wymaga znajomości kąta łamiącego φ pryzmatu, dlatego najpierw zajmiemy się wyznaczeniem tego kąta. Definicje kątów i rozmaite relacje między nimi przy padaniu wiązki na kąt łamiący i jednocześnie na obie sąsiednie ściany ukazuje Rysunek 1. W pomiarach za pomocą goniometru łatwo jest zmierzyć kąt ψ między promieniami odbitymi od obu powierzchni pryzmatu, więc naszym celem będzie wyznaczenie związku między tym kątem a kątem łamiącym.



Rys. 1. Wyznaczenie kąta łamiącego φ



Rys. 2. Wyznaczenie kąta odchylenia δ

Kąt $\sphericalangle ADC$ trójkąta ADC wynosi

$$\sphericalangle ADC = 180^\circ - \varphi_1 - \chi_1,$$

ale skoro

$$\chi_1 = 180^\circ - 2\alpha - \varphi_1,$$

więc

$$\sphericalangle ADC = 2\alpha,$$

jak zostało to zaznaczone na rysunku. Podobnie, dla kąta $\sphericalangle BDC$ znajdujemy:

$$\sphericalangle BDC = 2\beta,$$

a z rysunku widzimy także, że

$$\psi = 360^\circ - 2\alpha - 2\beta$$

i jednocześnie:

$$\alpha = 90^\circ - \varphi_1$$

oraz

$$\beta = 90^\circ - \varphi_2,$$

więc:

$$\psi = 360^\circ - 2\alpha - 2\beta = 360^\circ - 2(90^\circ - \varphi_1) - 2(90^\circ - \varphi_2) = 2\varphi_1 + 2\varphi_2 = 2\varphi,$$

a to prowadzi do poszukiwanego związku:

$$\varphi = \frac{1}{2}\psi.$$

Zakładając, że kąt łamiący φ pryzmatu jest znany, wyznaczymy współczynnik załamania szkła, z którego wykonany jest pryzmat. Definicje kątów i rozmaite między nimi relacje ukazane są na Rysunku 2. Ponieważ kąt zewnętrzny w trójkącie ABD jest równy kątowi łamiącemu pryzmatu φ (kąt ABD ma ramiona prostopadłe do ścian pryzmatu) – otrzymujemy następujące zależności:

$$\varphi = \beta_1 + \beta_2$$

oraz:

$$\delta = \alpha_1 - \beta_2 + \alpha_2 - \beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2 - \varphi.$$

O tym, pod jakim kątem α_2 promień opuści pryzmat decyduje kąt α_1 , pod jakim promień pada na pryzmat. Wyznamy teraz zależność między kątem α_2 a kątem α_1 . Z prawa Snella:

$\sin \alpha_1 = n \sin \beta_1$ dla płaszczyzny, przez którą promień wchodzi do pryzmatu, znajdujemy

$$\beta_1 = \arcsin\left(\frac{1}{n} \sin \alpha_1\right),$$

a z prawa Snella: $\sin \alpha_2 = n \sin \beta_2$ dla płaszczyzny, przez którą promień wychodzi, otrzymujemy:

$$\alpha_2 = \arcsin(n \sin \beta_2).$$

Ponieważ

$$\beta_2 = \varphi - \beta_1 = \varphi - \arcsin\left(\frac{1}{n} \sin \alpha_1\right),$$

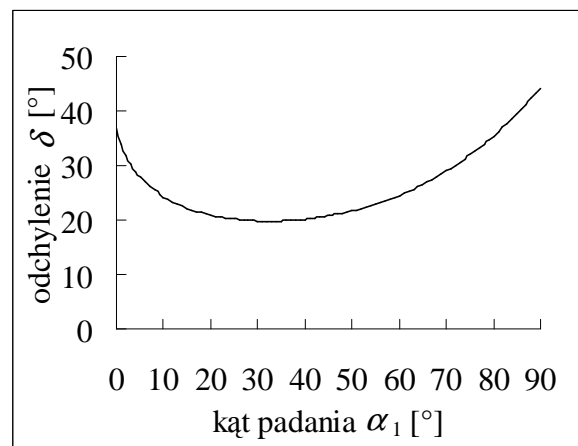
więc

$$\alpha_2 = \arcsin\left(n \sin\left(\varphi - \arcsin\left(\frac{1}{n} \sin \alpha_1\right)\right)\right),$$

a to prowadzi do kąta odchylenia δ jako funkcji kąta padania α_1 :

$$\delta = \alpha_1 + \arcsin\left(n \sin\left(\varphi - \arcsin\left(\frac{1}{n} \sin \alpha_1\right)\right)\right) - \varphi.$$

Przykładowy przebieg tej zależności, dla $n = 1,4$ oraz $\varphi = 45^\circ$, przedstawia Rysunek 3, na którym widać minimum w przebiegu zależności kąta odchylenia δ od kąta padania α_1 . Wyznaczenie, standardowymi metodami, wartości δ_{\min} minimalnej prowadzi do wniosku, że pojawia się ona



Rys. 3. Minimalny kąt odchylenia

wtedy, gdy bieg promienia w pryzmacie jest symetryczny względem dwusiecznej kąta łamiącego pryzmatu, tzn. gdy $\alpha_1 = \alpha_2$ oraz $\beta_1 = \beta_2$, co pociąga:

$$\beta_1 = \frac{1}{2}\varphi$$

oraz:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(\delta_{\min} + \varphi).$$

Prowadzi to do następującego wyrażenia na współczynnik załamania:

$$n = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \beta_1} = \frac{\sin\left(\frac{1}{2}(\delta_{\min} + \varphi)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\varphi\right)}.$$

Czytelnikowi pozostawiamy dowód, że warunki $\beta_1 = \beta_2$ oraz $\alpha_1 = \alpha_2$ faktycznie wyznaczają minimalną wartość kąta odchylenia.

Masz do dyspozycji

- goniometr;
- pryzmat szklany;
- lampę widmową helową, wodorową, neonową i światła białego.

Wykonanie ćwiczenia

- zapoznaj się z budową i obsługą goniometru;
- przygotuj goniometr do pomiarów;
- wykonaj pomiar kąta łamiącego pryzmatu;
- wykonaj pomiary kątów najmniejszego odchylenia prążków widmowych helu i wodoru;
- wykonaj pomiar kąta najmniejszego odchylenia przynajmniej jednego, najlepiej widocznego (w Twej opinii) prążka widmowego neonu;
- wykonaj pomiary kątów najmniejszego odchylenia krańców widma ciągłego światła białego.

W części DODATEK znajdują się informacje o budowie, obsłudze i sposobie wykonywania pomiarów za pomocą goniometru.

Analiza wyników pomiarów

Analiza danych winna zawierać następujące elementy:

- ustalenie realistycznych, dopuszczalnych błędów granicznych wielkości bezpośrednio mierzonych i wyznaczenie odpowiadających im niepewności standardowych – pamiętaj, że zdolność rozdzielcza przyrządu nie musi gwarantować sensownych błędów granicznych (oczywiście, możesz też od razu oszacować niepewności standardowe, bez przechodzenia przez etap błędów granicznych);
- prezentację ocen wszelkich wielkości wraz z niepewnościami standardowymi uwzględniającymi niepewności statystyczne i niepewności wynikające z dokładności przyrządów;
- wyznaczenie ocen nieznanych stałych, wraz z ich niepewnościami, w związku dyspersyjnym przedstawiającym zależność współczynnika załamania n od długości fali λ w fenomenologicznych modelach – Cauchy’ego:

$$n = A_0 + \frac{A_1}{\lambda^2}$$

oraz (uproszczonym) Sellmeiera:

$$n^2 - 1 = \frac{B_1 \lambda^2}{\lambda^2 - C_1};$$

prezentowane zależności nie przedstawiają liniowej relacji między obiema wielkościami, dlatego zaleca się rozważenie możliwości wyboru nowych zmiennych, aby po transformacji zależności te przyjęły postać liniową, co zawsze ułatwia analizę numeryczną;

- wybór modelu lepiej odtwarzającego dane doświadczalne;
- zastosowanie wybranego modelu do wyznaczenia długości fali, wraz z niepewnością, zmierzonego prążka widmowego neonu i porównanie uzyskanej wartości z danymi literaturowymi;
- oszacowanie wartości długości fal (bez niepewności) krańców widma światła białego.

Istotne, w Twojej opinii, kroki analizy danych podsumuj stosownymi tabelami z wynikami pośrednimi i zilustruj odpowiednimi rysunkami.

Jeśli na którymś z etapów analizy danych uznasz za niezbędne dopasowanie modelowej zależności do danych metodą najmniejszych kwadratów wystarczy, że podasz jawną formę wielkości minimalizowanej, jako że postać ta jednoznacznie wyznacza oceny poszukiwanych współczynników modelowej zależności wraz z ich niepewnościami i nie musisz cytować stosownych wzorów dla tych obiektów.

Dla ambitnych. Jeśli dysponujesz programem do dopasowywania krzywych, spróbuj swych sił i wyznacz oceny nieznanymi parametrów i ich niepewności dla bardziej rozbudowanych zależności dyspersyjnych – Cauchy’ego (model Cauchy’ego można, po stosownej zamianie zmiennych, zamienić na model liniowy, więc tu wystarczy nawet arkusz kalkulacyjny typu Excel):

$$n = A_0 + \frac{A_1}{\lambda^2} + \frac{A_2}{\lambda^4}$$

oraz Sellmeiera:

$$n^2 - 1 = \frac{B_1 \lambda^2}{\lambda^2 - C_1} + \frac{B_2 \lambda^2}{\lambda^2 - C_2}.$$

Literatura

- Sz. Szczeniowski, *Fizyka doświadczalna Część IV – Optyka*, Warszawa, 1983;
- D. Halliday, R. Resnick i J. Walker, *Podstawy fizyki*, t. 5, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2003;
- H. Szydłowski, *Pracownia fizyczna wspomagana komputerem*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, szereg wydań w latach 2003 ÷ 2012 ;
- A. Zięba, *Analiza danych w naukach ścisłych i technice*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2013.

Dodatkowe uwagi odnośnie do raportu

W raporcie zamieść, w stosownie dobranych tabelach, wszystkie surowe wyniki wykonanych pomiarów tak, aby sięgając jedynie do raportu i bez potrzeby odwoływania się do protokołu z doświadczenia można było wykonać pełną i niezależną analizę Twoich danych. Zadbaj o wierne przeniesienie zmierzonych wartości do raportu.

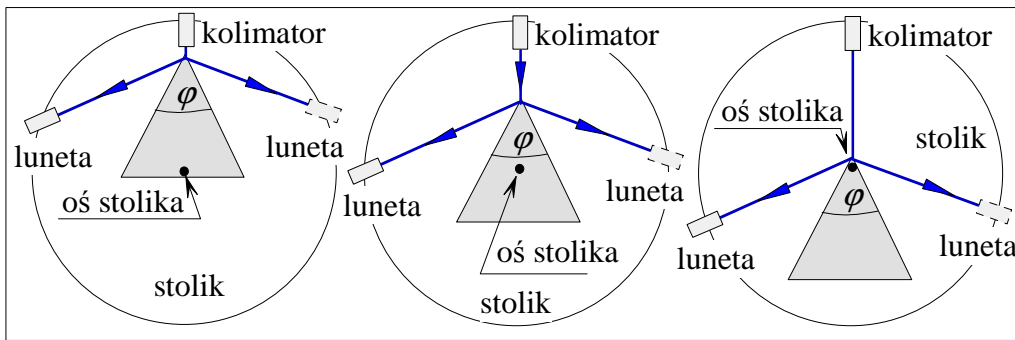
Nim przygotujesz raport, zaznajom się z uwagami zawartymi w opracowaniu *Instrukcja - Jak pisać raport końcowy* oraz z przykładową realizacją tych uwag w postaci *Przykładowy raport końcowy*. Materiały te zamieszczone są na stronie <http://anipw.igf.fuw.edu.pl> Pracowni wstępnej. Wymagania ukazane w tych opracowaniach będą bezwzględnie egzekwowane przy sprawdzaniu Twojego raportu. W szczególności pamiętaj o konwencji odnoszącej się do precyzji przedstawiania niepewności, a co za tym idzie, również wartości wielkości zmierzonej.

Absolutnie zalecane jest świadome przyjrzenie się redakcji tekstu a także tabel, rysunków i wzorów, sposobów ich numerowania, tytułowania i opisywania w dowolnym, ale wydanym przez uznane wydawnictwo, akademickim podręczniku do fizyki, jak również zajrzenie do kilku publikacji w różnych czasopismach naukowych, co może ułatwić podjęcie decyzji co do podziału Twojego raportu na części.

Pytania i zadania definiujące wymagania do ćwiczenia

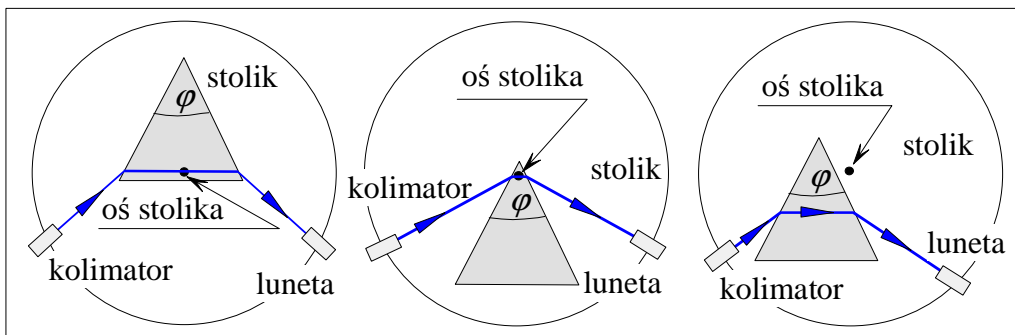
Problem 1. Przy pomiarze kąta łamiącego pryzmatu (jak na Rysunku 1), pryzmat umieszczamy na stoliku tak, że krawędź kąta łamiącego znajduje się na osi kolimatora, aby wiązkę światła z kolimatora rozdzielić na dwie. Możemy jednak pryzmat dowolnie przesunąć równoległe do siebie

na stoliku, jak na Rysunku 4, umieszczając go bliżej lub dalej od kolimatora. Czy dla pomiarów goniometrem ma znaczenie, jakie to będzie miejsce?



Rys. 4. Pomiar kąta łamiącego - przykłady ustawień pryzmatu na stoliku

Problem 2. Przy pomiarze kąta najmniejszego odchylenia na stoliku pryzmat możemy położyć w dowolnym miejscu, w wyniku czego wiązka światła z kolimatora może padać bliżej kąta łamiącego lub dalej od niego. Możemy też pryzmat położyć na boku stolika. Przykłady takich ustawień ukazuje Rysunek 5. Czy miejsce pryzmatu na stoliku ma znaczenie dla pomiarów goniometrem?



Rys. 5. Pomiar kąta odchylenia - przykłady ustawień pryzmatu na stoliku

Problem 3. Gdy na pryzmat pada wiązka światła złożona z fal o dwóch różnych długościach, to po przejściu przez pryzmat wiązka ta ulega rozszczepieniu na dwie wychodzące pod różnymi kątami. Czy kąt między wiązkami zależy od długości drogi jaką światło pokonuje w pryzmacie, a więc tego czy wiązka światła pada na pryzmat bliżej wierzchołka kąta łamiącego, czy też bliżej podstawy?

Problem 4. Co oznacza termin *widmo liniowe*?

Problem 5. Na czym polega zjawisko dyspersji światła?

Problem 6. Dlaczego pomiar współczynnika załamania odbywa się przez pomiar kąta najmniejszego odchylenia, a nie przez pomiar, po prostu, kąta odchylenia, kiedy to rzucamy promień światła na pryzmat pod dowolnym kątem, a nie jedynie tym, który gwarantuje najmniejsze odchylenie?

Pytania i zadania przybliżające, uzupełniające lub poszerzające treść ćwiczenia

Problem 7. Pokaż, że istotnie, symetryczny bieg promienia w pryzmacie gwarantuje minimalny kąt odchylenia promienia od kierunku pierwotnego. Jak kąt odchylenia zależy od kąta łamiącego?

Problem 8. Wiązka światła padająca na pryzmat pod kątem α składa się z fal o dwóch małych różniących się długościach λ_1 i λ_2 . Wyznacz różnicę $\Delta\delta$ kątów między wiązkami wychodzącymi z pryzmatu, jeśli współczynnik załamania fali o długości λ_1 wynosi n_1 a fali o długości λ_2 wynosi n_2 i wartości współczynników załamania niewiele się różnią. Kąt łamiący pryzmatu wynosi φ . Dla jakiego kąta padania α różnica $\Delta\delta$ jest największa (promienie odpowiadające dwóm długościom fali będą najsilniej rozbieżne)?

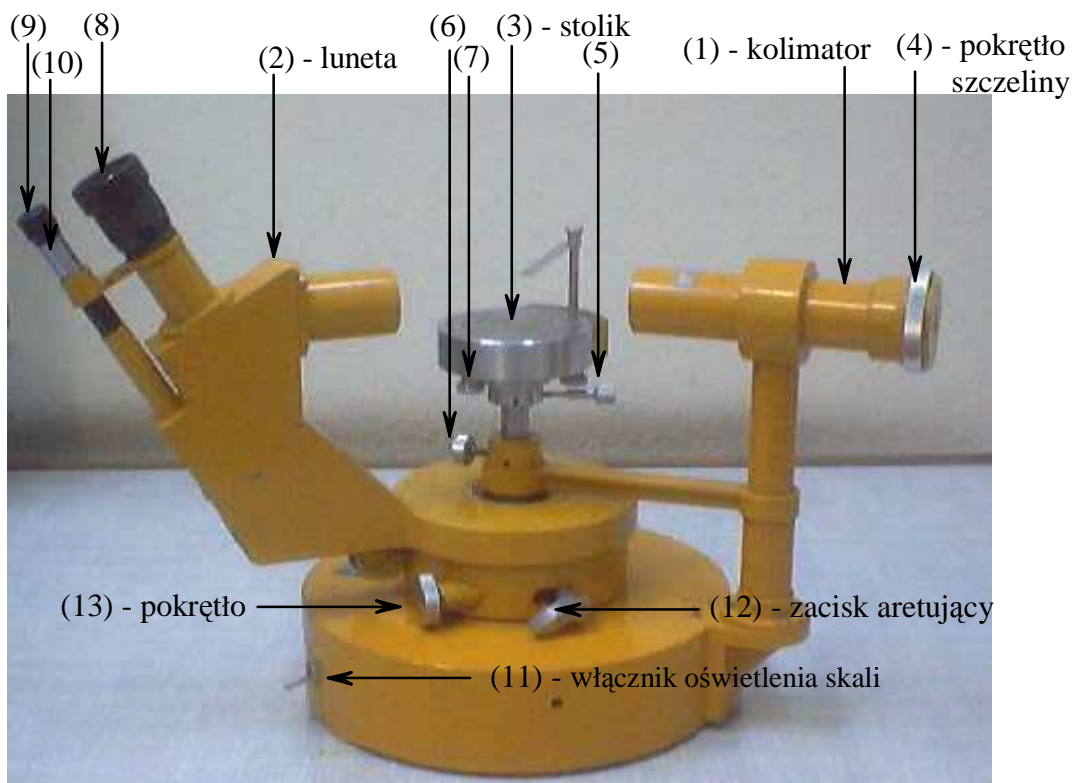
Problem 9. Wiązka światła składająca się z fal o długości odpowiednio λ_1 i λ_2 , pada prostopadłe na jedną ze ścian pryzmatu o kącie łamiącym φ . Przedyskutuj, dla jakiego zakresu wartości kąta

łamiącego i jakich wartości współczynników załamania obu fal, z pryzmatu wyjdzie wiązka światła zawierająca tylko jedną barwę.

DODATEK – BUDOWA I OBSŁUGA GONIOMETRU OPTYCZNEGO

BUDOWA GONIOMETRU

Goniometr służy do pomiarów kątów, a więc kąta łamiącego pryzmatu, kątów odchylenia promieni przechodzących przez pryzmat lub ugiętych przez siatkę dyfrakcyjną. Typowy goniometr ukazany jest na Rysunku 6.



Rys. 6. Budowa goniometru (fot. T. Nowak)

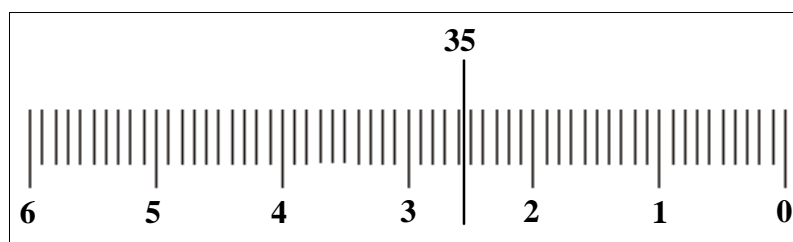
Goniometr składa się z kolimatora (1) lunety (2) i stolika (3). Kolimator zaopatrzony jest w regulowaną szczelinę, przed którą umieszczamy się źródło światła. Szerokość szczeliny zmienia się pokręcając pierścieniem (4).

Stolik, na którym umieszczamy pryzmat lub siatkę dyfrakcyjną, można obracać wokół pionowej osi po zwolnieniu śruby (5) oraz podnosić lub opuszczać po zwolnieniu śruby (6). Przy zwalnianiu śruby blokującej (6) stolik należy podtrzymywać ręką. Pochylenie stolika uzyskuje się przez obrót pokrętek trzech śrub elewacyjnych (7).

Luneta wyposażona jest w okular (8) z krzyżem z nitek pajęczych. W lunecie obserwujemy obraz szczeliny kolimatora, a wartość kąta między osią kolimatora a osią lunety odczytujemy w okularze (9) mikroskopu odczytowego (10). Oświetlenie skali kręgu pomiarowego włączamy włącznikiem (11). Obrótu zgrubnego lunety dookoła osi pionowej goniometru można dokonać ręką przy zwolnionym zatrzasku aretującym (12). Precyzyjny obrót wykonuje się pokrętkiem (13) po uprzednim zaciśnięciu zacisku aretującego.

UWAGA! Nie wolno obracać lunety ręcznie bez sprawdzenia, czy zacisk aretujący jest zwolniony. W żadnym wypadku nie stosuj siły przy obracaniu lunety!

Skala, jaką widzimy w okularze mikroskopu pomiarowego, jest skalą kątową obejmującą zakres od 0° do 360° , przy czym wartość najmniejszej działki to $1'$ (minuta). Przykładowy obraz pola widzenia mikroskopu odczytowego jest pokazany na Rysunku 7 i ukazuje wskazanie (około) $35^\circ 25' 30''$.



Rys. 7. Widok skali w okularze mikroskopu odczytowego

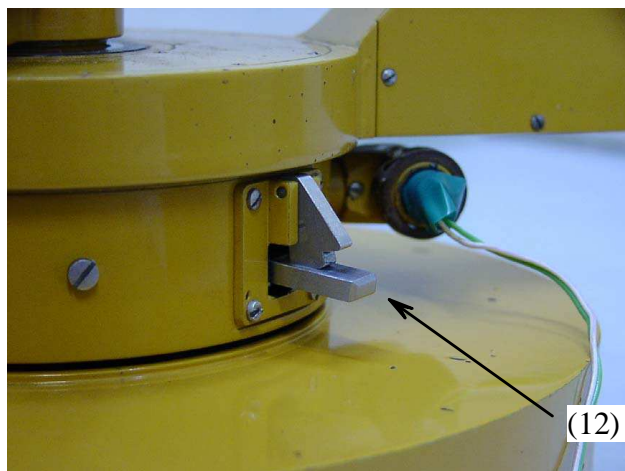
Rysunki 8 oraz 9 ukazują dwa położenia zatrasku (12). Służy on do sprzęgnięcia obrotu kręgu pomiarowego ze skalą z obrotem lunety. Przy położeniu zatrasku jak na Rysunku 8, przy obrocie lunety krąg pomiarowy pozostaje w miejscu, podczas gdy przy położeniu zacisku ukazanym na Rysunku 9, krąg obraca się razem z lunetą. W trakcie pomiaru zatrask musi pozostawać w położeniu unieruchamiającym krąg pomiarowy (pozycja jak na Rys. 8).

PRYZGOTOWANIE GONIOMETRU DO POMIARÓW

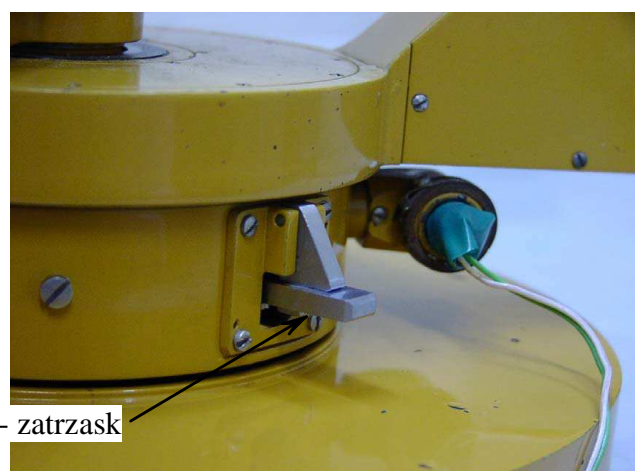
Goniometr używany w ćwiczeniu jest zbudowany tak, że nie wymaga wielu wstępnych operacji przygotowujących go do pracy. Niezbędne są tylko trzy, z których dwie są elementarne: wymagają ustawienia ostrości obrazu w lunecie i w mikroskopie pomiarowym. Trzecia, polegająca na poziomowaniu stolika, jest nieco bardziej wymagająca i zazwyczaj niepotrzebna, dlatego wszelkie Twoje działania w tym względzie skonsultuj uprzednio z prowadzącym ćwiczenie.

Ustawianie ostrości obrazu w lunecie i mikroskopie odczytowym

Ostrość obrazu w lunecie możemy uzyskać kręcąc okularom lunety. Podobnie, wykorzystując okular mikroskopu odczytowego, nastawiamy ostrość obrazu podziałki kątowej.



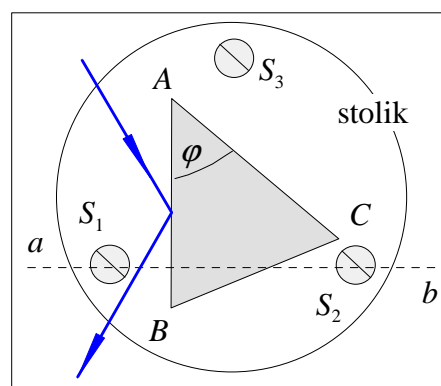
Rys. 8. Oborty kręgu i lunety rozprężone (fot. T. Nowak)



Rys. 9. Oborty kręgu i lunety sprzężone (fot. T. Nowak)

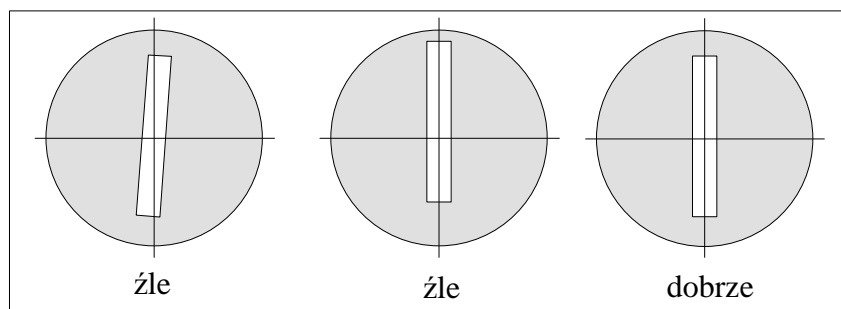
Ustawianie płaszczyzny stolika prostopadłe do jego osi

Położenie płaszczyzny stolika w stosunku do jego osi obrotu regulują trzy śruby elewacyjne (7) S_1 , S_2 i S_3 pod stolikiem. Ustawiamy oś lunety w stosunku do osi kolimatora pod kątem $60^\circ \div 90^\circ$ i ustawienia tego nie zmieniamy w trakcie całej dalszej procedury. Kładziemy pryzmat ABC na stoliku – Rysunek 10 – w taki sposób, aby jedna z jego ścian tworzących kąt łamiący φ , nazwijmy ją ścianą AB , była prostopadła do linii ab łączącej dwie wybrane śruby elewacyjnych – S_1 i S_2 . Szczelinę kolimatora oświetlamy, a stolikiem z pryzmatem obracamy tak, abyśmy w lunecie zobaczyli obraz szczeliny powstały przez odbicie



Rys. 10. Regulacja płaszczyzny stolika

od wybranej ściany pryzmatu. Szczelina powinna być stosunkowo wąska. Jeśli obraz szczeliny nie jest symetryczny, np. obrócony lub przesunięty w górę lub w dół względem nici pajęczych – jak na Rysunku 11 – to połowę deformacji usuwamy kręcąc śrubą S_1 , a drugą połowę śrubą S_2 . Po uzyskaniu obrazu szczeliny o krawędziach równoległych do nici pajęczych, obracamy stolik tak, aby w lunecie zobaczyć obraz szczeliny uzyskany przez odbicie promieni od ściany AC pryzmatu. Tym razem do uzyskania poprawnego obrazu szczeliny kręcimy tylko śrubą S_3 . Czynności te, tzn. korekcja obrazu powstałego przy odbiciu do ściany AB , a następnie od ściany AC należy powtórzyć kilkakrotnie – do zupełnego wyrównania obrazu szczeliny.



Rys. 11. Widok szczeliny w lunecie - przykłady złego i poprawnego ustawienia obrazu

Ustawianie kąтового kręgu pomiarowego ze skalą

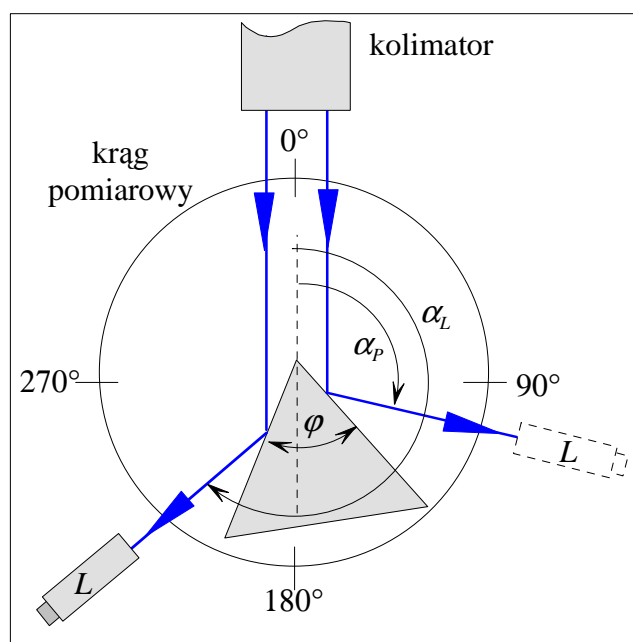
Pozycja zera na kręgu pomiarowym względem osi kolimatora lub lunety może być dowolna i jej ustalenie nie jest niezbędne, ale jeśli pociągają nas względy estetyczne lub porządkowe, to można to wykonać w następujący sposób. Zatrzask aretujący (12) ustawiamy jak na Rys. 8 i obracamy tak lunetę, aby wskazania w mikroskopie pomiarowym pokrywały się z działką 180° koła pomiarowego – niezależnie od obrazu szczeliny, której może nie być widać w ogóle. Sprzęgamy teraz ruch lunety z kołem pomiarowym – jak na Rys. 9 – i szczelinę oświetlamy. Obracając lunetę ustawiamy ją naprzeciw kolimatora tak, aby pionowa nitka pajęczka znalazła się w środku obrazu szczeliny – na stoliku nie powinno nic stać, co zakłócałoby bieg promieni z kolimatora. Wracamy z zatrzaskiem aretującym do pozycji z Rys. 8. Procedura ta prowadzi do ustawienia kręgu pomiarowego w orientacji ukazanej na Rysunku 12.

POMIARY KĄTÓW GONIOMETREM

Przed wykonaniem pomiarów z pryzmatem, dobrze jest pryzmat wytrzeć ręcznikiem papierowym lub chusteczką, aby usunąć odciski palców i inne zabrudzenia.

Pomiar kąta łamiącego pryzmatu

Oświetlamy szczelinę kolimatora, przy czym sama szczelina powinna być stosunkowo szeroka. Pryzmat ustawiamy na stoliku w taki sposób, aby światło ze szczeliny padając na kąt łamiący oświetlało obie ściany pryzmatu, jak ilustruje to Rysunek 12. Wyszukujemy lunetą obraz szczeliny powstały z odbicia od lewej ściany pryzmatu i odczytujemy wartość kąta α_L , następnie obracamy lunetę na prawą stronę pryzmatu, odszukujemy obraz szczeliny i odczytujemy wartość kąta α_P . Jeśli oba odczyty nie są rozdzielone zerem skali (jak na Rys. 12), to z obu wartości otrzymujemy:



Rys. 12. Wyznaczanie kąta łamiącego pryzmatu

$$\varphi = \frac{1}{2}(\alpha_L - \alpha_P).$$

Jeśli promień lewy i prawy oddzielone są od siebie zerem skali, wtedy:

$$\varphi = \frac{1}{2}(\alpha_L + 360^\circ - \alpha_P).$$

Pomiar należy powtórzyć kilkakrotnie, obracając delikatnie pryzmat o niewielki kąt (aby nie utracić możliwości oświetlenia obu ścian pryzmatu) wokół osi zadanej krawędzią łamiącą pryzmatu.

Pomiar kąta najmniejszego odchylenia

Promień z kolimatora po przejściu przez pryzmat ulega odchyleniu o kąt δ od swego pierwotnego kierunku wyznaczonego przez oś kolimatora. Ustawiamy pryzmat na stoliku w konfiguracji ukazanej linią ciągłą na Rysunku 13 i szukamy, dla wybranej linii widmowej, obrazu szczeliny odpowiadającego odchylenemu biegowi promieni po drugiej stronie pryzmatu. Po znalezieniu go, delikatnie obracamy stolik, obserwując w lunecie przesuwanie się obrazu. Jeśli obraz ucieknie z pola widzenia lunety, obracamy lunetę tak, aby ponownie uzyskać obraz w jej polu widzenia i kontynuujemy obrót stolika. W pewnym momencie zauważymy, że kierunek ruchu obrazu szczeliny zmienia się na przeciwny. Obracając delikatnie i kilkakrotnie stolik w jedną i drugą stronę należy upewnić się, że uchwyciło się poprawnie ten moment. Po ustawieniu krzyżownicy pajączek lunety na środku obrazu szczeliny, odczytujemy kąt δ_L najmniejszego odchylenia promienia. Następnie obracamy stolik tak, aby promień z lunety padał na drugą ścianę tworzącą kąt łamiący pryzmatu, powtarzamy procedurę wyznaczenia kąta najmniejszego odchylenia i odczytujemy kąt δ_P . Jeśli promienie lewy i prawy nie są rozdzielone zerem skali (jak na Rys. 13), to kąt δ_{\min} najmniejszego odchylenia wynosi:

$$\delta_{\min} = \frac{1}{2}((\delta_L - 180^\circ) + (180^\circ - \delta_P)) = \frac{1}{2}(\delta_L - \delta_P).$$

W przeciwnym przypadku kąt ten wyznaczamy ze związku:

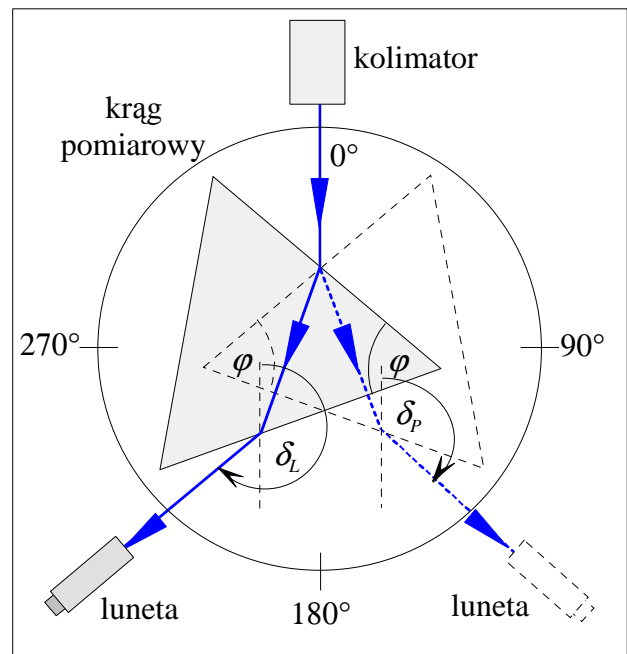
$$\delta_{\min} = \frac{1}{2}(360^\circ - \delta_P + \delta_L).$$

Pojedynczy pomiar kąta najmniejszego odchylenia obarczony jest większym błędem niż pojedynczy pomiar kąta łamiącego pryzmatu. Spowodowane jest to trudnością uchwyceniu momentu, w którym obraz szczeliny zaczyna się cofać przy obrocie stolika. Dlatego pomiary dla każdej linii należy powtórzyć kilkakrotnie, przekręcając stolik lub pryzmat o niewielki kąt i ponowne poszukując punktu zwrotnego.

Kąt najmniejszego odchylenia możemy wyznaczyć z pomiaru jedynie np. kąta δ_L (lub δ_P) odchylenia promienia po jednej stronie pryzmatu. W tym celu wystarczy, że zmierzmy kąt δ_0 pod jakim obserwujemy obraz szczeliny przy obserwacji na wprost – bez pryzmatu na stoliku, a wtedy:

$$\delta_{\min} = \begin{cases} \delta_L + \delta_0, & \text{gdy } \delta_0 < 180^\circ, \\ 360^\circ - \delta_0 + \delta_L, & \text{gdy } \delta_0 > 180^\circ. \end{cases}$$

Nie jest to zalecana metoda, jako że przy jej stosowaniu nie kasują się rozmaite błędy związane z ewentualnym brakiem symetrii w układzie pomiarowym.



Rys. 13. Pomiar kąta najmniejszego odchylenia

Uwagi dotyczące eksploatacji goniometru

- przy pracy z goniometrem należy zachować dużą ostrożność;
- obracając lunetę **nie wolno** używać siły;
- goniometr należy chronić przed gwałtownymi wstrząsami i uderzeniami;
- nie wolno dotykać części szklanych dostępnych z zewnątrz.

UZUPEŁNIENIE

Analiza danych w tym ćwiczeniu odwołuje się do zagadnienia kalibracji, którego aspekt statystyczny może nie być znany, dlatego niniejszy passus poświęcimy właśnie temu problemowi. Problem kalibracji przyrządu sprowadza się, w istocie, do dwóch kwestii:

- pomiaru, w ściśle kontrolowanych warunkach, odpowiedzi przyrządu na dobrze zdefiniowany sygnał i ujęciu tej odpowiedzi w stosowną formułę;
- odwróceniu owej formuły, aby w praktycznych zastosowaniach ocenić siłę sygnału i jego niepewność ze znajomości, wraz z niepewnością, odpowiedzi przyrządu.

Siła sygnału i odpowiedź przyrządu

Przy kalibracji przyrządu poddajemy go działaniu serii x_i niezależnych i bardzo dobrze znanych (w idealnym przypadku: znanych bezbłędnie) sygnałów, a wyidealizowany mechanizm pomiaru wytwarza serię n bezbłędnych wartości η_i , $i = 1, 2, \dots, n$, wyznaczających odpowiedzi przyrządu na owe sygnały. W rezultacie pomiaru w miejsce wartości η_i znajdujemy wartość y_i . W modelowym opisie statystycznym, obok wartości y_i , traktowanych jako wartości wylosowane z pewnego, być może nieznanego rozkładu i być może zależnego od wartości x zaaplikowanego sygnału, mamy także odchylenia standardowe σ_i charakteryzujące jakość pomiaru wielkości η_i . Należy podkreślić, że w praktyce, w miejsce odchyłeń standardowych znamy, zazwyczaj, jedynie niepewności standardowe u_i . W pozostałej części tego UZUPEŁNIENIA będziemy przyjmowali modelowe założenie o znajomości odchyłeń standardowych σ_i . Czytelnik powinien być świadom, że zastąpienie odchyłeń standardowych niepewnościami nie doprowadzi go do ścisłych wielkości, a jedynie ocen poszukiwanych wielkości, które w dodatku będą z reguły obciążone z uwagi na nieliniowy charakter związków wyznaczających te wielkości (np. otrzymamy obciążone oceny wariancji ocen parametrów lub obciążone oceny nieznanymi parametrów).

Formuła kalibracyjna

W problemie kalibracji dysponujemy formułą $\eta = \mu(x; \boldsymbol{\theta})$ wiążącą odpowiedź η z sygnałem x , w której $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$ to układ m , zazwyczaj nieznanymi, parametrów. Formuła ta może wynikać z teoretycznego modelu działania przyrządu lub też być dziełem czystej praktyki laboratoryjnej ujmującej w wygodny sposób fenomenologię procesu pomiarowego.

Sposobem oceny nieznanymi parametrów θ_i jest metoda najmniejszych kwadratów, w której minimalizowana jest, względem nieznanymi parametrów, ważona odwrotnościami kwadratów odchyłeń standardowych σ_i suma kwadratów odchyłeń zmierzonych wartości y_i od wartości modelowych $\eta_i = \mu(x_i; \boldsymbol{\theta})$ (w skrócie: ważona suma kwadratów reszt):

$$R(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \mu(x_i; \boldsymbol{\theta}))^2}{\sigma_i^2}.$$

We wszystkich naszych dalszych rozważaniach przyjmujemy, że zgodnie z intuicyjnie zrozumiałym wymogiem, liczba n pomiarów jest większa od liczby m nieznanymi parametrów.

Liniowa formuła kalibracyjna

Zacniemy od przypomnienia, że w kontekście metody najmniejszych kwadratów problemem liniowym nie nazywamy liniowej zależności między zmienną zależną (odpowiedzią η przyrządu) a zmienną niezależną (sygnałem x), lecz zależność, w której relacja między zmienną niezależną a zmienną zależną jest *liniowa w nieznanymi parametrach* i ma postać:

$$\eta = \mu(x; \boldsymbol{\theta}) = \varphi_1(x) \theta_1 + \varphi_2(x) \theta_2 + \dots + \varphi_m(x) \theta_m, \quad (1)$$

gdzie wielkości $\varphi_i(x)$ są w pełni znanymi, liniowo niezależnymi funkcjami – są to zazwyczaj kolejne potęgi wielkości x , ale mogą to być też np. funkcje Bessela lub wielomiany ortogonalne.

Dla n wartości x_i otrzymujemy n związków dla n wartości $\mu(x; \theta)$

$$\mu(x_i; \theta) = \sum_{j=1}^m \varphi_j(x_i) \theta_j, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

odpowiadających wielkościom mierzonym y_i . Powyższe równania możemy zapisać zwracając w formie macierzowej

$$\eta = \Phi(x) \theta,$$

gdzie

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu(x_1; \theta) \\ \mu(x_2; \theta) \\ \vdots \\ \mu(x_n; \theta) \end{pmatrix}, \quad \Phi(x) = \begin{bmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \cdots & \varphi_m(x_1) \\ \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) & \cdots & \varphi_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1(x_n) & \varphi_2(x_n) & \cdots & \varphi_m(x_n) \end{bmatrix}, \quad \theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_m \end{pmatrix},$$

a jeśli jeszcze do tego zdefiniujemy:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

to i samą sumę kwadratów reszt będziemy mogli zgrabnie zapisać w postaci:

$$R(\theta) = (\mathbf{y} - \Phi \theta)^T \mathbf{U}^{-1} (\mathbf{y} - \Phi \theta).$$

Oceny parametrów i ich wariancje

Różniczkowanie sumy kwadratów reszt względem nieznanymi parametrów prowadzi do liniowego układu równań na te parametry:

$$\Phi^T \mathbf{U}^{-1} \Phi \theta = \Phi^T \mathbf{U}^{-1} \mathbf{y},$$

a jeśli macierz Φ , wymiaru $n \times m$, zwana **macierzą planu**, jest rzędu m , czyli jej wszystkie kolumny są liniowo niezależne, to oceny $\hat{\theta}$ nieznanymi parametrów wyznaczamy ze związku:

$$\hat{\theta} = (\Phi^T \mathbf{U}^{-1} \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{U}^{-1} \mathbf{y}. \quad (2)$$

W dalszej części tego UZUPEŁNIENIA stosować będziemy notację „z daszkiem” dla ukazania oceny dyskutowanej wielkości (w duchu tej notacji zmierzone wartości y_i zapisalibyśmy jako \hat{y}_i).

Jeśli pomiary są nieobciążone, czyli jeśli $E(\mathbf{y}) = \eta = \Phi \theta$, to i ocena $\hat{\theta}$ jest nieobciążona:

$$E(\hat{\theta}) = (\Phi^T \mathbf{U}^{-1} \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{U}^{-1} E(\mathbf{y}) = (\Phi^T \mathbf{U}^{-1} \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{U}^{-1} \Phi \theta = \theta,$$

a jej wariancja wynosi:

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= E\left((\hat{\theta} - \theta)(\hat{\theta} - \theta)^T \right) \\ &= E\left(\left((\Phi^T \mathbf{U}^{-1} \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{U}^{-1} \mathbf{y} - (\Phi^T \mathbf{U}^{-1} \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{U}^{-1} \eta \right) \left((\Phi^T \mathbf{U}^{-1} \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{U}^{-1} \mathbf{y} - (\Phi^T \mathbf{U}^{-1} \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{U}^{-1} \eta \right)^T \right) \\ &= (\Phi^T \mathbf{U}^{-1} \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{U}^{-1} E\left((\mathbf{y} - \eta)(\mathbf{y} - \eta)^T \right) \mathbf{U}^{-1} \Phi (\Phi^T \mathbf{U}^{-1} \Phi)^{-1} = (\Phi^T \mathbf{U}^{-1} \Phi)^{-1}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że alternatywnie, elementy odwrotnej macierzy wariancji możemy wyznaczyć z prostej relacji:

$$[\mathbf{V}^{-1}]_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 R}{\partial \theta_i \partial \theta_j}.$$

Jak widzimy, w przypadku, gdy nieznanymi parametry występują w formule w sposób liniowy, minimalizację można przeprowadzić analitycznie i uzyskać zamknięte wyrażenia zarówno na oceny

$\hat{\theta}$ nieznanymi parametrów jak i ich macierz wariancji \mathbf{V} . Jeśli jednak parametry θ pojawiają się w zależności $\eta = \mu(x; \theta)$ w sposób nieliniowy, rozwiązanie problemu nie ma formy zamkniętej, a sama minimalizacja ważonej sumy kwadratów reszt wymaga, zazwyczaj, zastosowania wyspecjalizowanych metod numerycznych.

Musimy także zwrócić uwagę na fakt, że macierz \mathbf{V} przestaje być macierzą wariancji i kowariancji, a staje się macierzą ocen tych wielkości, jeśli macierz \mathbf{U} utworzymy z niepewności pomiarów wielkości y_i , a nie ich odchyłeń standardowych.

Test zgodności χ^2 Pearsona

Ważnym obiektem problemu liniowego (1) jest suma kwadratów reszt w minimum:

$$R_{\min} = (\mathbf{y} - \Phi \hat{\theta})^T \mathbf{U}^{-1} (\mathbf{y} - \Phi \hat{\theta})$$

w przypadku, gdy wyniki y_i pomiarów opisane są rozkładem Gaussa $N(y_i; \eta_i, \sigma_i)$, gdzie $\eta_i = \mu(x_i; \theta)$ jest wartością oczekiwaną zmiennej y_i o wariancji σ_i^2 . Ten specyficzny rozkład powoduje, że R_{\min} przedstawia wartość wylosowaną z rozkładu χ^2 o liczbie $n - m$ stopni swobody, o ile proponowana krzywa kalibracyjna jest słuszna, co pozwala zbudować tzw. test χ^2 Pearsona i zweryfikować propozycję $\mu(x; \theta)$. Oczywiście powinniśmy pamiętać, że stosowanie niepewności standardowych u_i w miejsce odchyłeń standardowych σ_i w macierzy \mathbf{U} osłabia siłę takiej konkluzji.

Przykład: zależność kalibracyjna postaci $\eta = ax + b$

Dla przykładu rozważmy dopasowanie do danych liniowej zależności w postaci linii prostej $\mu(x; \theta) = ax + b$, kiedy to macierz planu przyjmuje postać:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{bmatrix},$$

a oceny \hat{a} i \hat{b} parametrów a i b znajdujemy ze związku (2):

$$\begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix} = \frac{1}{SS_{xx} - S_x^2} \begin{bmatrix} S & -S_x \\ -S_x & S_{xx} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} S_{xy} \\ S_y \end{pmatrix} = \frac{1}{SS_{xx} - S_x^2} \begin{pmatrix} SS_{xy} - S_x S_y \\ S_y S_{xx} - S_x S_{xy} \end{pmatrix},$$

gdzie:

$$S = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}, \quad S_x = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sigma_i^2}, \quad S_{xx} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}, \quad S_y = \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{\sigma_i^2}, \quad S_{xy} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2}.$$

Obok ocen parametrów a oraz b znajdujemy macierz wariancji tych ocen:

$$\mathbf{V}[\hat{a}, \hat{b}] = \frac{1}{SS_{xx} - S_x^2} \begin{bmatrix} S & -S_x \\ -S_x & S_{xx} \end{bmatrix},$$

w której elementy diagonalne:

$$\mathbf{V}[\hat{a}] = \sigma_{\hat{a}}^2 = \frac{S}{SS_{xx} - S_x^2}, \quad \mathbf{V}[\hat{b}] = \sigma_{\hat{b}}^2 = \frac{S_{xx}}{SS_{xx} - S_x^2} \quad (3)$$

to wariancje ocen \hat{a} oraz \hat{b} , a wyraz pozadiagonalny

$$\mathbf{V}[\hat{a}, \hat{b}] = \text{cov}[\hat{a}, \hat{b}] = C_{\hat{a}\hat{b}} = -\frac{S_x}{SS_{xx} - S_x^2}, \quad (4)$$

zwany kowariancją, przedstawia tzw. korelację między obiema ocenami parametrów. Często, prezentując wyniki dopasowania, podajemy także tzw. Pearsona liniowy współczynnik korelacji:

$$\rho = \frac{\mathbf{V}[\hat{a}, \hat{b}]}{\sqrt{\mathbf{V}[\hat{a}]\mathbf{V}[\hat{b}]}} = -\frac{S_x}{\sqrt{SS_{xx}}},$$

opisujący siłę relacji między ocenami parametrów a i b . Ograniczony jest on w swych wartościach do przedziału $[-1;1]$, przy czym im jego wartość bezwzględna jest bliższa jedności, tym siła tej relacji jest bliższa matematycznej zależności liniowej.

Wariancja odpowiedzi przyrządu i siły sygnału

Istnienie wyrazów pozadiagonalnych w macierzy \mathbf{V} powoduje, że oceny $\hat{\theta}$ nieznanych parametrów w zależności kalibracyjnej $\eta = \mu(x; \theta)$ przestają być statystycznie niezależne i „szkolny” wzór na przenoszenie odchyłeń standardowych (propagację błędów) w celu obliczenia odchylenia standardowego $\sigma_{\hat{\eta}}$ oczekiwanej odpowiedzi $\hat{\eta} = \mu(x; \hat{\theta})$ przyrządu na sygnał x różny od dotychczas zastosowanych, wymaga korekty. Zamiast niego musimy skorzystać ze związku:

$$\sigma_{\hat{\eta}}^2 = \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial \mu}{\partial \theta_i} V_{ij} \frac{\partial \mu}{\partial \theta_j} = \sum_{i,j=1}^m \varphi_i(x) V_{ij} \varphi_j(x),$$

gdzie diagonalne elementy V_{ii} macierzy \mathbf{V} to wariancje ocen parametrów θ_i , np. w przypadku dopasowywania linii prostej są to związki (3), natomiast elementy pozadiagonalne to kowariancje tychże ocen – w przypadku linii prostej jest to wielkość (4), w którym to przypadku końcowe odchylenie standardowe $\sigma_{\hat{\eta}}$ wartości odpowiedzi przyrządu przyjmuje postać:

$$\sigma_{\hat{\eta}}^2 = x^2 \sigma_a^2 + \sigma_b^2 + 2x C_{ab}.$$

Po tym, gdy wykalibrowaliśmy przyrząd, chcemy go zastosować do pomiarów, tj. chcemy ocenić siłę x sygnału, jeśli przyrząd zarejestrował odpowiedź y , przy czym odchylenie standardowe tej odpowiedzi wynosi σ_y . Oczywiście, najpierw musimy odwrócić zależność $\eta = \mu(x; \theta)$ i wyznaczyć siłę x jako funkcję wielkości η . Nawet jeśli takiej operacji nie potrafimy wykonać analitycznie, a jedynie numerycznie, to taką odwrotną zależność zapiszmy jako $x = \zeta(\eta; \theta)$ i wyznaczmy z niej ocenę siły sygnału:

$$\hat{x} = \zeta(y; \hat{\theta}),$$

jak również odchylenie standardowe $\sigma_{\hat{x}}$ tej oceny:

$$\sigma_{\hat{x}}^2 = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} \sigma_y \right)^2 + \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial \zeta}{\partial \theta_i} V_{ij} \frac{\partial \zeta}{\partial \theta_j}.$$

W przypadku dyskutowanej wcześniej relacji $\eta = ax + b$, ocena siły sygnału wynosi:

$$\hat{x} = \frac{1}{\hat{a}}(y - \hat{b}),$$

a jej odchylenie standardowe to:

$$\sigma_{\hat{x}}^2 = \frac{1}{\hat{a}^2} \left(\left(\frac{y - \hat{b}}{\hat{a}} \sigma_a \right)^2 + 2 \frac{y - \hat{b}}{\hat{a}} C_{ab} + \sigma_b^2 + \sigma_y^2 \right) = \frac{1}{\hat{a}^2} (\hat{x}^2 \sigma_a^2 + 2\hat{x} C_{ab} + \sigma_b^2 + \sigma_y^2).$$

Jeśli wykonaliśmy serię pomiarów wielkości η przy ustalonej wartości x , to w miejsce wielkości y używamy średniej, a zamiast odchylenia standardowego σ_y stosujemy jej odchylenie standardowe.

Opracował: Krzysztof Korona.

Uzupełnił: Roman J. Nowak, 23 listopada 2015.